Procesos aleatorios - 1
Distribuciones

Andrés Pomi

Taller MMC-Bio 2021

Probabilidad en ejemplos

Probabilidad como frecuencia de un determinado suceso i

$$P(i) = n(i)/N$$

n(i) es el número de sucesos i

N es el número total de sucesos cuando N→infinito.

Elementos axiomáticos básicos

1. $P(A) \geq 0$ for every event A.
2. $P(S) = 1$ for the certain event S.
3. $P(A + B) = P(A) + P(B)$, if two events A and B are mutually exclusive.

Eventos estadísticamente independientes

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B) = P(A)P(B)$$

Probabilidad condicional

- La probabilidad condicional de B, dado que ocurrió A, se denota por

$$P(B|A)$$

Y se puede definir, por el Teorema de Bayes como:

$$P(B|A) = P(A|B)\, P(B) \,/\, P(A)$$

Teorema de Bayes y diagnóstico médico

Likelihood of the Evidence given that the Hypothesis is True

Prior Probability of the Hypothesis

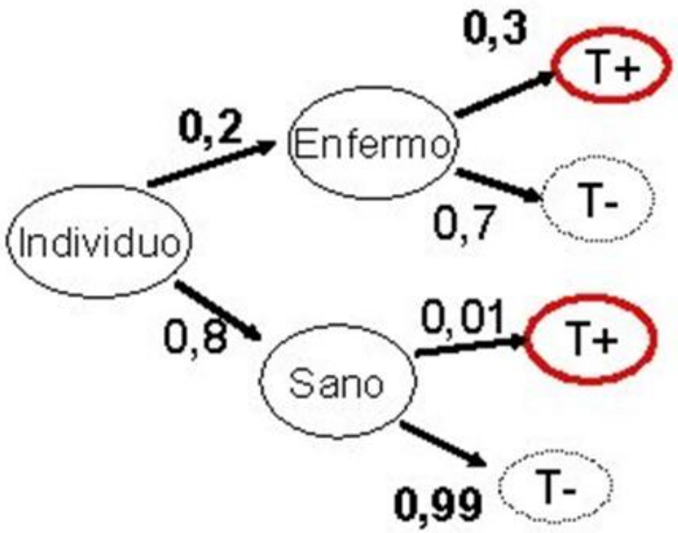
$$P(H|E) = \frac{P(E|H) * P(H)}{P(E)}$$

Posterior Probability of the Hypothesis given that the Evidence is True

Prior Probability that the evidence is True

Ejemplo: Test diagnóstico y Regla de Bayes

- La diabetes afecta al 20% de los individuos que acuden a una consulta. La presencia de glucosuria se usa como indicador de diabetes. Su sensibilidad es de 0,3 y la especificidad de 0,99. Calcular los índices predictivos.



$$P(Enf \mid T+) = \frac{P(Enf \cap T+)}{P(Enf \cap T+) + P(Sano \cap T+)}$$

$$= \frac{0{,}2 \cdot 0{,}3}{0{,}2 \cdot 0{,}3 + 0{,}8 \cdot 0{,}01} = 0{,}88$$

$$P(Sano \mid T-) = \frac{P(Sano \cap T-)}{P(Sano \cap T-) + P(Enf \cap T-)}$$

$$= \frac{0{,}8 \cdot 0{,}99}{0{,}8 \cdot 0{,}99 + 0{,}2 \cdot 0{,}7} = 0{,}85$$

Variables aleatorias

Una variable aleatoria tiene dos atributos:

{espacio de muestreo, distribución de probabilidad}.

Ejemplo: un dado neutro: {{1..6}, P(i) = 1/6}

- Discretas
- Continuas

Función de distribución de probabilidades

Asigna una probabilidad a cada valor (x) de la variable aleatoria X.

- Cuando la variable aleatoria es discreta se expresa

$$0 \leq P_X(x) \leq 1$$

$$\sum_{\text{all } x} P_X(x) = 1$$

- Si la variable es continua

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(x)dx = 1$$

Medidas de centralidad y dispersión de la distribución

Variable aleatoria discreta X, que puede tomar los valores x_i con probabilidades $f(x_i)$

- Esperanza o promedio: <x>

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)$$

- Varianza

$$E(X) = \mu$$

$$\sigma^2(X) = E[(x-\mu)^2] = E(X^2) - (E(X))^2$$

es decir: $<x^2> - <x>^2$

- Variable continua

$$\text{Variables continuas:} \quad \langle x \rangle = \int_a^b p(x)\, x\, dx \; ; \quad \sigma^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$

Ensayos de Bernoulli independientes y consecutivos

- En cada ensayo hay solo dos resultados posibles, excluyentes y complementarios

- <u>Ejemplo</u>: Al tirar una moneda sólo puede salir Cara (C) o Número (N)

Llamemos p a la probabilidad de C y q (=1-p)a la probabilidad de N

[hacer script coin.m]

Secuencia de Bernoulli: CCNCNNNCNN…

¿Cuál es la probabilidad de una secuencia?

- Ejemplo: CCNCNNNCNN
- ppqpqqqpqq $p^4(1-p)^6$

- ¿Y de la secuencia NCCNNNNCNC?
- qppqqqqpqp $p^4(1-p)^6$

- ¿Cuál es la probabilidad de que en 10 ensayos sucesivos salgan exactamente 4 Caras?

(Probabilidad de una secuencia con 4 caras) x (N° de secuencias con 4C)

¿De cuántas maneras podemos tomar 4 elementos de un conjunto de 10?

$$C_k^n = C_4^{10} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

$$p(4,10) = C_4^{10} p^4 (1-p)^6$$

Distribución Binomial

- Definición de la variable aleatoria:

k = N° de Caras en M-secuencia

- Asigna probabilidades a cada resultado posible

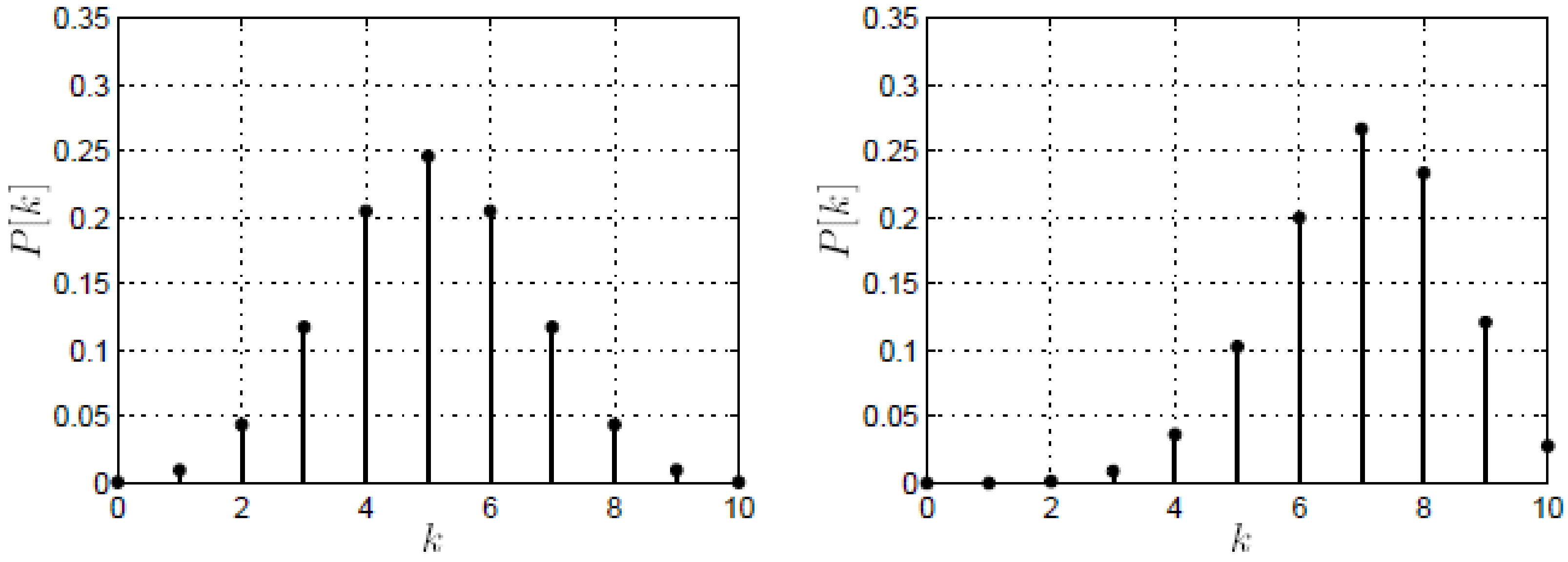
$$P[k] = \binom{M}{k} p^k (1-p)^{M-k} \qquad k = 0, 1, \ldots, M$$

- Notar que la distribución depende del valor p

$$E(X) = np$$

$$\sigma^2 = np.q$$

Aquí n=M

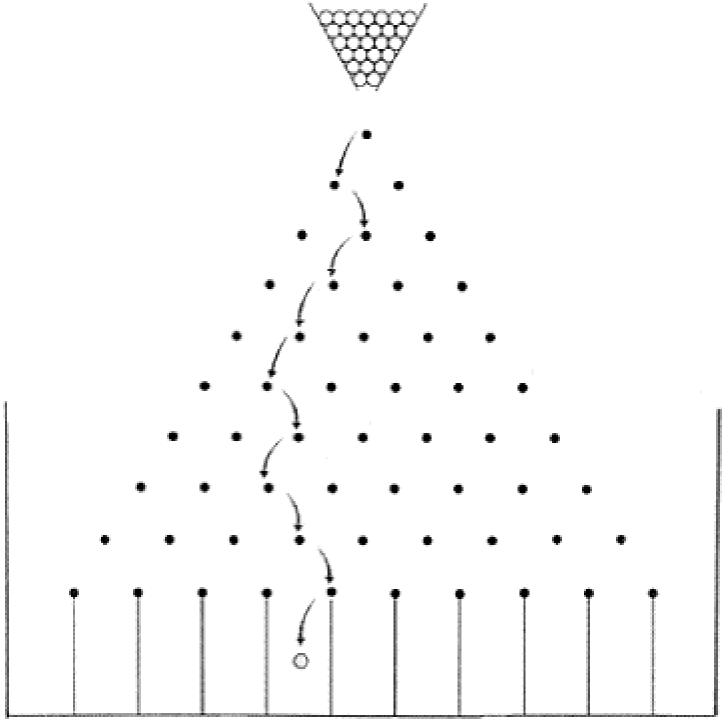


(a) $M = 10$, $p = 0.5$

(b) $M = 10$, $p = 0.7$

Secuencia de bifurcaciones

- Máquina de Galton




E(u) = 0
n → ∞
k = n.p
u = 0
u = (x − m)/σ
k/σ
√(n.p.q)
1/√2π e^(−½u²)

Suma de variables aleatorias independientes

- Sin importar la distribución de cada variable aleatoria:

siempre tienden a la distribución Normal

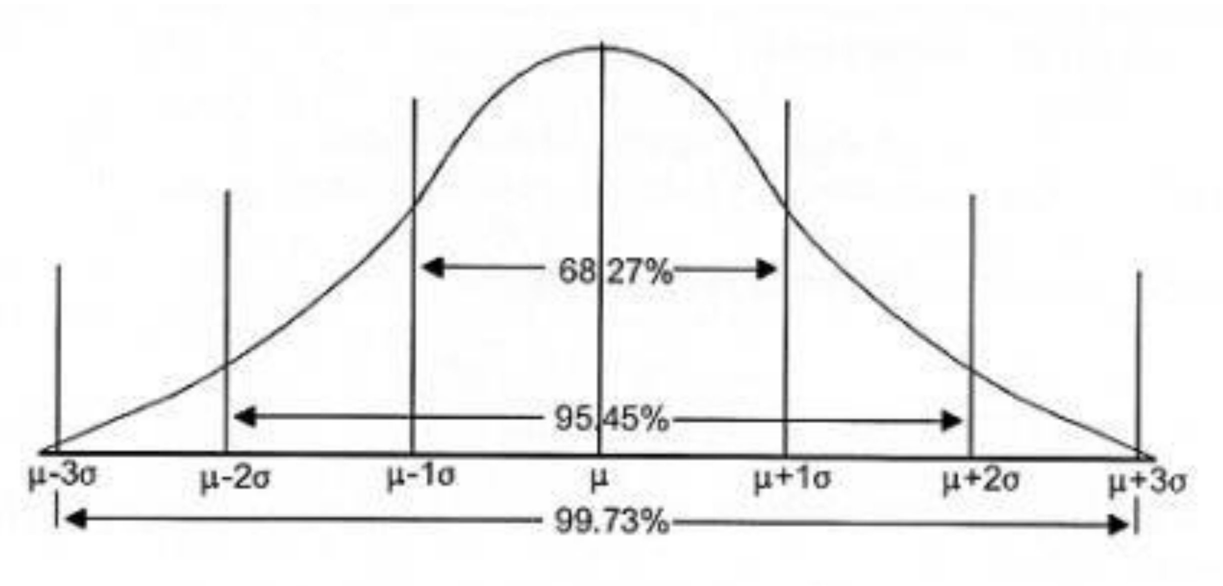
Cuando N tiende a infinito y p es grande

- Distribución Binomial → Distribución Normal o Gaussiana

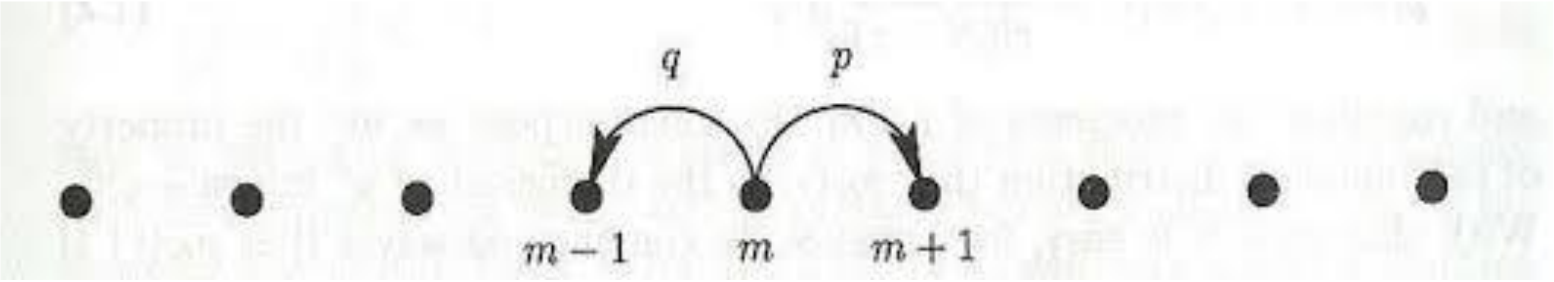
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

μ	media
σ	desviación estándar
σ^2	varianza

$$\sigma^2(X) = \langle x_i^{\,2} \rangle - \langle x_i \rangle^2$$



Otra aproximación – Marcha aleatoria 1-D



- ver programas

Si N es grande y p muy pequeño
(eventos infrecuentes)

- Distribución Binomial → Distribución de Poisson

$$f(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$$

El número de llamadas telefónicas que llegan a una central telefónica es modelado frecuentemente como una variable aleatoria de Poisson. Asumiendo que en promedio hay 10 llamadas por hora. ¿Cuál es la probabilidad de que haya exactamente 5 llamadas en una hora? ¿Cuál es la probabilidad de que haya exactamente 5 llamadas en 30 minutos?

$$f(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$$

$$\lambda = 10$$

$$f(5) = \frac{10^5}{5!} e^{-10}$$

$$f(5) = 0.0378$$

x es el número de ocurrencias

λ es promedio de ocurrencias en un intervalo (tiempo, volumen, área)

$$E(X) = \sigma^2 = \lambda$$