

Campos Magnéticos en la Materia

Desarrollo multipolar de $\vec{A} \rightarrow \vec{A}_{\text{dipolo}}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$

def $\vec{M} \equiv$ "momento dip. mag. por unidad de volumen"

$$\vec{m} = \vec{M} d^3\vec{r} \rightarrow \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}_b}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3\vec{r}' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{K}_b}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3\vec{r}'$$

estática

$$\frac{\nabla \times \vec{B}}{\mu_0} = \vec{J} = \vec{J}_f + \vec{J}_b \Rightarrow \nabla \times \left(\frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} \right) = \vec{J}_f$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\vec{H}}$

$$\left. \begin{aligned} \nabla \times \vec{H} &= \vec{J}_f \\ \nabla \cdot \vec{H} &= -\nabla \cdot \vec{M} \end{aligned} \right\}$$

s: $\vec{J}_f = 0 \Rightarrow \exists w / -\nabla w = \vec{H} \Rightarrow \nabla^2 w = \nabla \cdot \vec{M}$

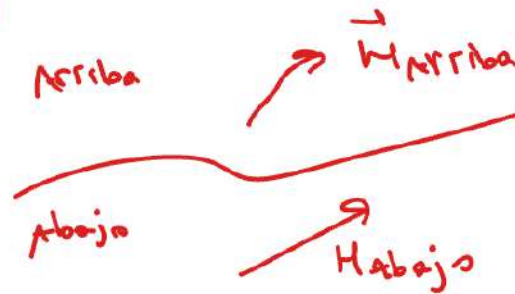
s: $\nabla \cdot \vec{M} = 0$
resuelvo Laplace
 $\nabla^2 w = 0$

cond. de borde

$$H_{\text{arriba}}^{\perp} - H_{\text{abajo}}^{\perp} = -M_{\text{arriba}}^{\perp} + M_{\text{abajo}}^{\perp}$$

$$\vec{H}_{\text{arriba}}^{\parallel} - \vec{H}_{\text{abajo}}^{\parallel} = \vec{k}_F \times \hat{n}$$

$$\vec{B}_{\text{arriba}}^{\parallel} - \vec{B}_{\text{abajo}}^{\parallel} = \mu_0 (\vec{k} \times \hat{n})$$



$\nabla \cdot \mathbf{w} = 0$

Si el medio es

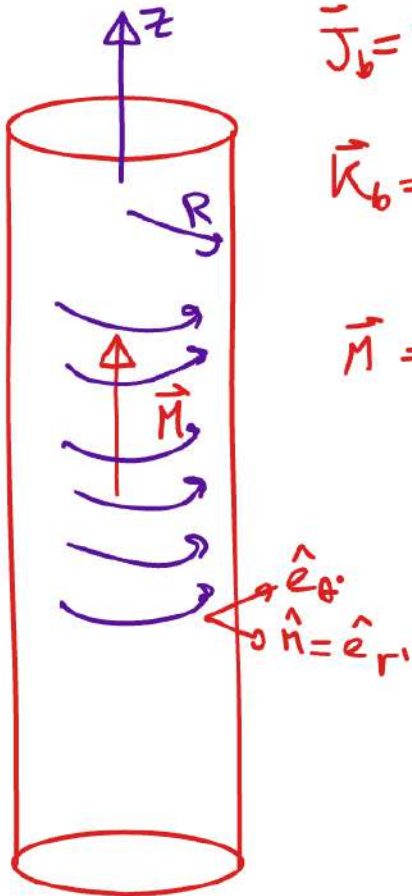
lineal

$$\vec{H} = \chi_m \vec{H}$$

$$\vec{B} = \underbrace{\mu_0 (1 + \chi_m)}_{\mu} \vec{H}$$

perm.
vacío $\rightarrow \mu_0$
perm.
del mat. $\rightarrow \chi_m$

13. Un cilindro circular infinito de radio R , lleva una magnetización \vec{M} uniforme y paralela a su eje. Encuentre el campo magnético (debido \vec{M}) dentro y fuera del cilindro.



$$\vec{J}_b = \nabla \times \vec{M} = 0$$

$$\vec{K}_b = \vec{M} \times \hat{n} = M_0 \hat{e}_\theta$$

$$\vec{M} = M_0 \hat{k}$$

$$\hat{n} = \hat{e}_r$$

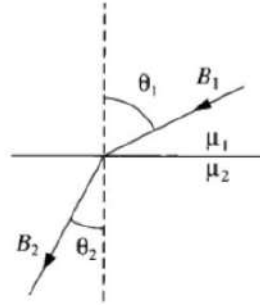
Ah! es un solenoide... claro

$$\Rightarrow \vec{B} = \mu_0 \underbrace{n I}_{M_0} \hat{k} \quad \leftarrow \text{corriente sup.}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B} = \mu_0 M_0 \hat{k}} \quad \text{si } r < R$$

$$\boxed{\vec{B} = 0} \quad \text{si } r > R$$

14. En la interface entre dos materiales magnéticos lineales, las líneas de campo magnético se doblan. Muestre que, de acuerdo a la figura, si no hay corriente libre en la separación de los medios, se cumple que:



$$\frac{\tan(\theta_1)}{\tan(\theta_2)} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow B_1^\perp = B_2^\perp \Rightarrow B_1 \cos \theta_1 = B_2 \cos \theta_2$$

$$\vec{K}_f = 0 \Rightarrow \nabla \times \vec{H} = 0$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{H}_1 - \vec{M}_1 &= 0 \\ \vec{H}_2 - \vec{M}_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{B_1 \sin \theta_1}{\mu_1} = \frac{B_2 \sin \theta_2}{\mu_2}$$

$$\Rightarrow \frac{B_1 \sin \theta_1}{\mu_1} = \frac{B_2 \sin \theta_2}{\mu_2}$$

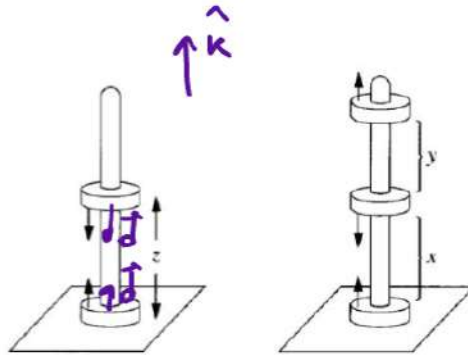
$$\Rightarrow \frac{\mu_1}{\tan(\theta_1)} = \frac{\mu_2}{\tan(\theta_2)}$$



$$\boxed{\frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{\tan(\theta_1)}{\tan(\theta_2)}}$$

15. Un conocido "juguete" consiste en imanes permanentes con forma de dona y magnetización paralela a su eje. Estos imanes puede moverse sobre un eje sin fricción. Considera los imanes como dipolo de masa m_d y momento dipolar \vec{d} .

- a) Si se colocan dos imanes anti-paralelamente sobre el eje sin fricción, el de arriba flotará sobre el de abajo. ¿A qué altura z flotará el imán de arriba?
- b) Si se coloca encima un tercer imán paralelo al de más abajo. ¿Cuál es el cociente entre las separaciones x e y ?



Esbozo de sol.

$\vec{B}_{dip}(z)$
Abajo

$$\nabla(\vec{m} \cdot \vec{B}) = F_{m/dip}^{arriba}(z)$$

↑
dipolo de arriba
($-\vec{d}$)

$$\Rightarrow m\vec{a} = F_{m/dip}^{arriba}(z) - mg\hat{k} = 0$$

$$z_{eq} = F_{m/dip}^{-1/2}(mg)$$

b) misma idea

$$e_2 q = \frac{m}{\sigma_p} (mg)$$

Electromagnetismo (2021)

Práctico 9

~~Circuitos Magnéticos~~ - Ley de Faraday y Ampere-Maxwell

Ley de Faraday

$$\mathcal{E}_{\text{fem}} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \frac{d\Phi_B}{dt}$$

$$\nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Ley de A-M

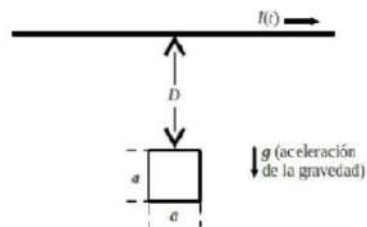
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{enc.}} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

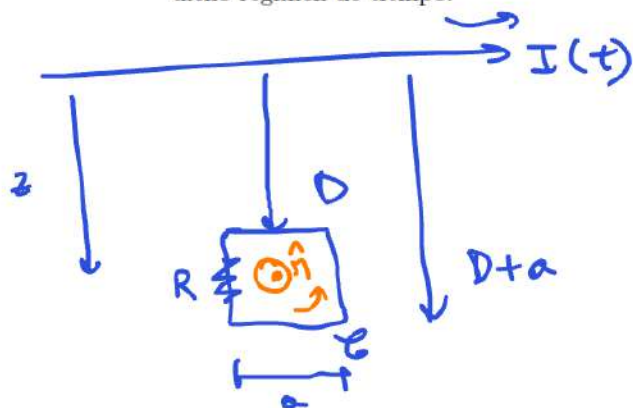
Vamos a enfocar la atención en los campos debidos a las variaciones temporales



13. A través de un alambre conductor horizontal (largo) circula una corriente variable. Una espira conductora cuadrada de lado a , masa m y resistencia R , se encuentran en un plano vertical a una distancia D por debajo del alambre, como se muestra en la figura. En el tiempo $t = 0$ la espira se libera a partir del reposo. Si se desprecia la autoinductancia de la espira:



- Determine la corriente inducida sobre la espira cuadrada.
- Determine cual debe ser la corriente en función del tiempo para que la espira se mantenga en reposo luego de ser liberada. Muestre que la misma debe decrecer con el tiempo. Suponga que en tiempo cero la corriente es I_0 . ¿Durante cuánto tiempo la corriente puede mantener a la espira en reposo? Suponga de ahora en más, que el sistema se encuentra en dicho régimen de tiempo.



$$\mathcal{E}_{\text{FEM}} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = RI_{\text{esp.}}$$

$$\parallel$$

$$-\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot \hat{n} da$$

¿quién es \vec{B} ? \vec{B} es el producido por $I(t) \Rightarrow \vec{B}(z) = \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi z} (-\hat{n})$

$$\Rightarrow \Phi_B = - \int_D^{D+a} \int_0^a \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi z} dx dz = -\frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln\left(\frac{D+a}{D}\right)$$

$$\rightarrow I_{esp} = \frac{d}{dt} \left[\frac{\mu_0 I a}{2\pi R} \ln\left(\frac{D+a}{D}\right) \right] \Rightarrow \left[I_{esp} = \frac{\mu_0 \dot{I} a}{2\pi R} \ln\left(\frac{D+a}{D}\right) + \frac{\mu_0 I a \dot{D}}{2\pi R} \left[\frac{1}{D+a} - \frac{1}{D} \right] \right]$$

↑
resist.

b) si $\dot{D} = 0 \Rightarrow I_{esp} = \frac{\mu_0 \dot{I} a}{2\pi R} \ln\left(\frac{D+a}{D}\right)$

$$\Rightarrow m\vec{a} = 0 \Rightarrow B(D) I_{esp} a - B(D+a) I_{esp} a + mg$$

$$\vec{F}_{mag} = q \vec{v} \times \vec{B}$$



$$\vec{F}_{esp} = \int_C I_{esp} d\vec{r} \times \vec{B} = \int_{\cancel{A}} + \int_{\cancel{B}} + \int_{\cancel{C}} + \int_{\cancel{D}}$$

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi z} (-\hat{n})$$

$$\int_0^a I_{esp} \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi D} (-dx \hat{i}) \times (-\hat{n})$$

-k dx

$$\int_0^a I_{esp} \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi (D+a)} (+dx \hat{i}) \times (-\hat{n})$$

k dx

$$\Rightarrow \vec{F}_{\text{mag esp}} = \frac{I_{\text{esp}} \mu_0 I(t) \cdot a}{2\pi} \left[-\frac{1}{D} + \frac{1}{D+a} \right] \hat{k}$$

$$\Rightarrow m\vec{a} = 0 \Rightarrow \vec{F}_{\text{mag esp}} - mg\hat{k} = 0 \Rightarrow 1 = \frac{I_{\text{esp}} \mu_0 I(t) a}{2\pi mg} \left[\frac{1}{D+a} - \frac{1}{D} \right]$$

$$\Rightarrow I(t) \frac{\mu_0 I a^2}{(2\pi)^2 R mg} \ln\left(\frac{D+a}{D}\right) \left[\frac{1}{D+a} - \frac{1}{D} \right] = 1$$

$$\Rightarrow I = \frac{S < 0}{\underbrace{\frac{(2\pi)^2 R mg D(D+a)}{\mu_0 a^3 \ln\left(\frac{D}{D+a}\right)}}_{\text{denominator}}} \cdot \frac{1}{I}$$

$$\Rightarrow \frac{dI}{dt} = \frac{S}{I} \Rightarrow I^2(t) - I^2(0) = 2St$$

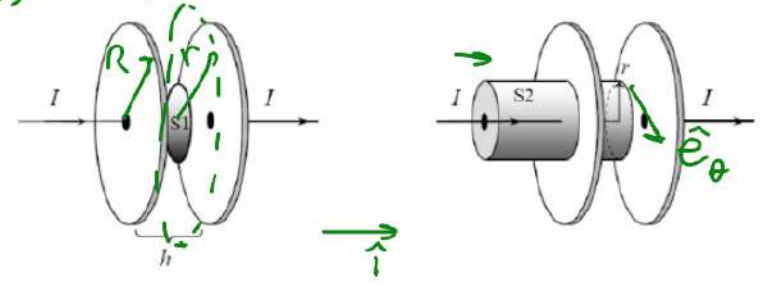
$$\Rightarrow I(t) = \sqrt{I(0)^2 + 2St}$$

$I(t) \in \mathbb{R} \Rightarrow t_{\text{max}} = -\frac{I(0)^2}{2S}$

16. Considere un condensador de placas paralelas circulares (radio R), como se muestra en la figura, con cables finos que conectan los centros de las placas. La separación entre las placas es $h \ll R$. Una corriente constante I fluye de las placas, y se asume que la densidad de carga superficial $\sigma(\vec{r}, t)$ es uniforme en todo momento, siendo cero en el tiempo inicial.

a) Encuentre el campo eléctrico entre las placas para todo tiempo t .

$\sigma(\vec{r}, t) = \sigma(t)$



$\vec{E} = \begin{cases} \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{i} & \text{si } r < R \\ 0 & \text{si } r > R \end{cases}$

$h \ll R$

$\oint \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 I + \mu_0 \left(\epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \right)$

- b) Encuentre la corriente de desplazamiento a través de un círculo de radio r en un plano entre las placas paralelo a ellas. Usando este círculo como "circuito amperiano" y la superficie plana que engendra, halle el campo magnético a una distancia del eje.
- c) Repita la parte anterior pero utilice la superficie cilíndrica S_2 (complemento de S_1 del cilindro) mostrada en la figura.
- d) Si usted mide \vec{B} en el laboratorio, ¿detecta los efectos de la corriente de desplazamiento, o simplemente confirma los efectos de las corrientes ordinarias?

b) $I_D = \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$

$\Phi_E = \begin{cases} \frac{\sigma}{\epsilon_0} \pi r^2 & \text{si } r < R \\ \frac{\sigma}{\epsilon_0} \pi R^2 & \text{si } r > R \end{cases}$

$\oint \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$

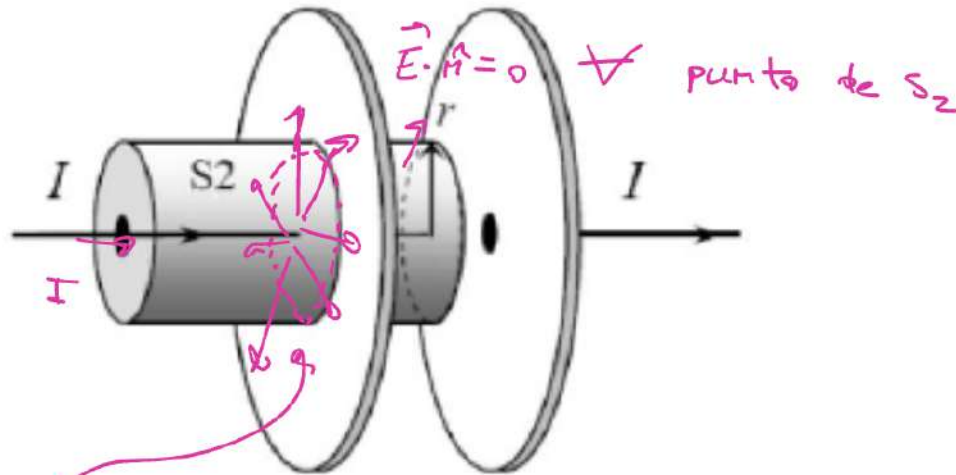
$\Rightarrow B(r) 2\pi r = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \begin{cases} r^2 & \text{si } r < R \\ R^2 & \text{si } r > R \end{cases}$

→ / . . 1 . .

$$\Rightarrow \vec{B}(r) = \begin{cases} \frac{\mu_0 I \hat{\phi}}{2} & \text{si } r < R \\ \frac{\mu_0 I R^2 \hat{\phi}}{2r} & \text{si } r > R \end{cases}$$

$\left[R^2 \text{ si } r > R \right]$
 $d) \frac{\mu_0 \left(\dot{Q} \pi R^2 \right)}{2\pi r}$

c)



eje, pasa corriente!