(3) a) Porque campos estacionarios $\partial_t T^{\alpha\beta} = 0$

$\Rightarrow$ conservación local de 3-momento implica

$$\partial_i T^{ij} = 0$$

$$\Rightarrow 0 = \int_{\Sigma} \partial_i T^{ij} \, d^3x = \int_{\partial\Sigma} T^{ij} n_i \, darea$$

Fuerza que ejerce campo EM sobre exterior a traves un pedazito de $\partial\Sigma$ es $T^{ij} n_i \, darea$

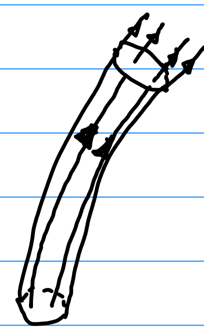
Entonces la fuerza total que ejerce a traves de $\partial\Sigma$ es cero

b) $$T_{ij} = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{2}\vec{E}^2 \delta_{ij} - E_i E_j\right) + \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{2}\vec{B}^2 \delta_{ij} - B_i B_j\right)$$

Fuerza que ejerce campo en el interior sobre exterior a traves de elemento de area $d\vec{a}$ es

$T^{ij} da_i$

Σ



Caso 1. Elemento de area tangencial al campo $\vec{E}$

$$T^{ij} da_i = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{2}\vec{E}^2 \delta^{ij} - E^i E^j\right) n_i \, darea = \frac{1}{8\pi} \vec{E}^2 n^j$$

apunta hacia afuera y es normal $\Rightarrow$ presión positiva

Caso 2. Elemento de area en la tapa

$\Rightarrow \vec{E}$ paralelo o antiparalelo a $\vec{n}$

$$T^{ij} da_i = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{2}\vec{E}^2 n^j - \vec{E}^2 n^j\right) d\text{area} = -\frac{1}{8\pi}\vec{E}^2 n^j$$

$\Rightarrow$ una tensión.

(6) a) Expresión que di en apuntes para T_{EM} tiene signo mal

b) $$T^{\alpha\beta}_{EM} = \frac{1}{4\pi}\left(F^{\alpha\epsilon}F^{\beta}{}_{\epsilon} - \frac{1}{4}\eta^{\alpha\beta}F^{\delta\epsilon}F_{\delta\epsilon}\right)$$

Queremos mostrar que ec's de Maxwell sin carga $\Rightarrow \partial_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$
(Si hay cargas no vale en general porque campo puede intercambiar 4-momento con las cargas.)

Ec^ns de Maxwell sin cargas $\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = 0$, $\partial_{[\alpha}F_{\beta\gamma]} = 0$

$$\partial_\alpha T^{\alpha\beta}_{EM} = \frac{1}{4\pi}\left(\underbrace{\partial_\alpha F^{\alpha\epsilon}}_{=0} F^{\beta}{}_{\epsilon} + F^{\alpha\epsilon}\partial_\alpha F^{\beta}{}_{\epsilon} - \frac{1}{2}(\partial^\beta F_{\delta\epsilon})F^{\delta\epsilon}\right)$$

Segundo término $-F^{\alpha\epsilon}\partial_\alpha F_{\epsilon\gamma}\eta^{\gamma\beta} = -F^{\alpha\epsilon}\partial_{[\alpha}F_{\epsilon]\gamma}\eta^{\gamma\beta}$

$$0 = \partial_{[\alpha}F_{\epsilon\gamma]} = \frac{1}{3}\left(\partial_\alpha F_{\epsilon\gamma} + \partial_\epsilon F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\epsilon}\right)$$

$$\partial_{[\alpha}F_{\epsilon]\gamma} = \frac{1}{2}\left(\partial_\alpha F_{\epsilon\gamma} - \partial_\epsilon F_{\alpha\gamma}\right) = \frac{1}{2}\left(\partial_\alpha F_{\epsilon\gamma} + \partial_\epsilon F_{\gamma\alpha}\right)$$

por segunda ec^n de Max. $= -\frac{1}{2}\partial_\gamma F_{\alpha\epsilon}$

$$\partial_\alpha T^{\alpha\beta}_{EM} = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{2}F^{\alpha\epsilon}\partial_\gamma F_{\alpha\epsilon}\eta^{\gamma\beta} - \frac{1}{2}(\partial^\beta F_{\delta\epsilon})F^{\delta\epsilon}\right)$$

$$= 0$$

(8) $T^{\mu\nu} = -\frac{\Lambda}{8\pi G} g^{\mu\nu}$ Λ, G constantes

Demuestre que $D_\mu T^{\mu\nu} = 0$

$$D_\mu T^{\mu\nu} = -\frac{\Lambda}{8\pi G} D_\mu g^{\mu\nu}$$

Pero la metricidad que es uno de nuestros hipotesis sobre gravedad $\iff Dg = 0$

$$= 0$$

(9) En teoría de campos el vacío es un estado invariante bajo transformaciones de Lorentz. Entonces la densidad de energía debería ser igual en cualquier referencial de Lorentz en este estado

Densidad de energía en ref Lorentz con 4-velocidad u es

$$\rho = T_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta$$

Para $T_{\alpha\beta} = -\frac{\Lambda}{8\pi G} \eta_{\alpha\beta}$ esto vale ya que entonces

$$\rho = -\frac{\Lambda}{8\pi G} \eta_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta \qquad \eta_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = -1$$

$$= \frac{\Lambda}{8\pi G}$$

Este es el unico tensor estres-energía con esta propiedad

Dem: Vamos a base ON de vectores que diagonaliza a $T_{\alpha\beta}$

$$T_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} A & & & \\ & B & & \\ & & C & \\ & & & D \end{bmatrix} \Rightarrow \rho = \gamma^2 (A + B v_x^2 + C v_y^2 + D v_z^2)$$

Debe ser independiente de direccion de $\vec{V}$

$$\Rightarrow B = C = D$$

$$\Rightarrow \rho = \gamma^2 (A + B v^2) = \frac{A}{1-v^2}\left(1 + \frac{B}{A} v^2\right) \Rightarrow \frac{\rho}{A}(1-v^2) = 1 + \frac{B}{A} v^2$$

$$\Rightarrow \frac{\rho}{A} = 1 \quad \frac{B}{A} = -1$$

$T_{\alpha\beta} = \rho\, \eta_{\alpha\beta}$

(5) a) $T^{\alpha\beta} = \int d^3p \, \frac{f(\bar{p})}{m} p^\alpha p^\beta$

Justificación: Divide el espacio de momento en celdas de volumen $\Delta^3 p$

El gas consiste de poblaciones de partículas en distintas celdas. Las partículas en una de estas poblaciones todas tiene esencialmente la misma velocidad $\Rightarrow$ Forman un polvo

$\Rightarrow$ tienen $T^{\alpha\beta} = mNu^\alpha u^\beta = \frac{N}{m} p^\alpha p^\beta$ con N = densidad de numero en ref de reposo de población

Sumando los $T^{\alpha\beta}$ de las poblaciones da

$$T^{\alpha\beta} = \int d^3p \, \frac{N(\bar{p})}{m} p^\alpha p^\beta$$

(10) a) $T_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} A & & & \\ & B & & \\ & & C & \\ & & & D \end{bmatrix}$

Densidad de energía en referencia Lorentziano local de velocidad u

$$\rho = T_{\mu\nu} u^\mu u^\nu$$

A menudo suponemos que esto debe ser ≥ 0, porque es así para toda materia clasica que conocemos.

¿Cuales son las condiciones sobre A, B, C, D tal que $\rho \geq 0 \; \forall u$?

$\rho = \gamma^2 (A + Bv_x^2 + Cv_y^2 + Dv_z^2)$ $\Rightarrow \rho \geq \gamma^2 (A - A\vec{v}^2) = A \geq 0$

$\Rightarrow A \geq 0$. $A+B,\ A+C,\ A+D \geq 0 \Rightarrow B, C, D \geq -|A|$