Cadenas de Markov

Andrés Pomi

Taller MMC-Bio 2021

Propiedad de Markov

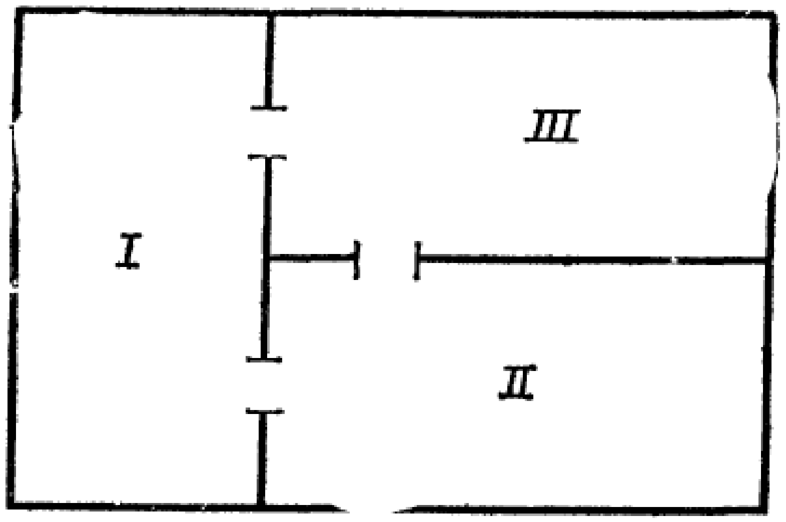
Las cadenas de Markov y los procesos de Markov son un tipo especial de procesos estocásticos que poseen la siguiente propiedad:

- **Propiedad de Markov:**

El comportamiento futuro de un sistema sólo depende de su estado actual, independientemente del camino por el cual se llegó al mismo, de la historia. Dicho de otro modo, "dado el presente, el futuro es independiente del pasado"

Ejemplo

- Ratón en una caja de tres compartimientos



Vector de estados

- Es un vector de probabilidad – Un vector fila **p** de n componentes es un vector de probabilidad si todos sus componentes son no-negativos y su suma es 1.

$$\mathbf{p} = \left(p_1, p_2, \cdots, p_n \right)$$

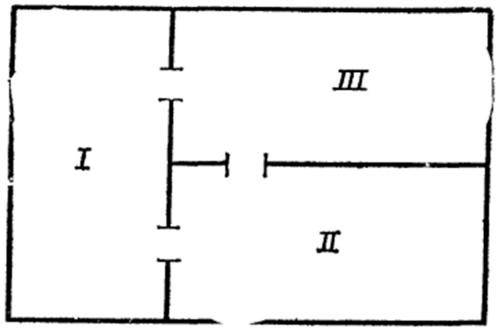
$$p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$$

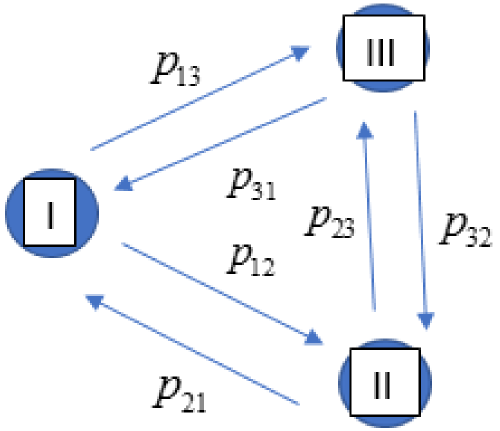
Probabilidades de Transición entre Estados

- La probabilidad de que estando en el estado i se pase el estado j se denomina probabilidad de transición de i a j:

$$p_{ij}$$

- El conjunto de probabilidades de transición entre cada par de estados posibles, se puede visualizar en un grafo dirigido. Los nodos son los estados y las flechas son las transiciones posibles entre pares de estados, cada una ‘pesada’ con la correspondiente probabilidad de transición





Matriz de probabilidades de transición

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

- Es una matriz de probabilidad: todos los elementos son no-negativos y los componentes de cada fila suman 1 (las filas son vectores de probabilidad).

- Ejemplos de matrices de probabilidad:

$$1)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix};\ 2)\ \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix};$$

$$3)\ \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix};\ 4)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/3 & 5/12 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Estado inicial del sistema

- Ejemplo del ratón en la caja.

$$\mathbf{p}^{(0)} = \left(1, 0, 0\right)$$

- ¿Y si hay una cierta población de ratones?

Propiedades de vectores y matrices de probabilidad

- Si **p** es un vector de probabilidad n-dimensional y **P** es una matriz de probabilidad de (nxn), entonces **pP** es un vector de probabilidad

$$\mathbf{r} = \mathbf{p}P = (p_1, p_2, \ldots, p_n) \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \ldots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \ldots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \ldots & p_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= (p_1 p_{11} + p_2 p_{21} + \ldots + p_n p_{n1}, \ldots, p_1 p_{1n} + p_2 p_{2n} + \ldots + p_n p_{nn})$$

- Si **P** y **Q** son matrices de probabilidad (nxn), su producto es una matriz de probabilidad. Como corolario, $\mathbf{P}^2$, $\mathbf{P}^3$, …, $\mathbf{P}^n$ son matrices de probabilidad

- Probar con ejemplos

Vector fijo de probabilidad

- Si **P** es una matriz de probabilidad (nxn), entonces existe un vector **t** no-nulo de n componentes tal que **tP=t**

Evolución del sistema

- Cadena de Markov -

- La probabilidad de cada estado en t=2, depende de la probabilidad de cada estado en t=1 y de la matriz de transición

$$\mathbf{p}^{(2)} = \mathbf{p}^{(1)}\mathbf{P}$$

- ¿Cuál es la probabilidad de que en n pasos el ratón se encuentre en cada compartimiento (cuál es el estado del sistema en t=n)?
- Probabilidades de transición en dos pasos

$p_{ij}^{(2)}$: componente p_{ij} de $\mathbf{P}^2$

Tipos de cadenas

- Homogéneas – Las probabilidades de transición son fijas, no varían con el tiempo

- Regulares – Para algún tiempo t, todos los elementos de $\mathbf{P}^t$ son estrictamente positivos

(Esto implica que el grafo es conexo, y todos los estados son accesibles entre ellos)

- ……………

Iteración y probabilidades a largo término

- La probabilidad de distribución en m-pasos de una cadena de Markov es el componente m-ésimo del vector fila

$$\mathbf{p}^{(m)} = \left(p_1^{(m)}, p_2^{(m)}, \cdots, p_n^{(m)} \right)$$

donde $p_i^{(m)}$ es la probabilidad de que el sistema esté en el estado E_i en luego de m-pasos

$$\mathbf{p}^{(m)} = \mathbf{p}^{(0)} \mathbf{P}^m$$

¿Existirá una probabilidad estacionaria a largo plazo, independiente de la distribución de probabilidad inicial?

Las cadenas de Markov regulares tienden a una distribución estacionaria

- Si P es una matriz de probabilidad regular, tiene un único vector fijo de probabilidad **t**.
- Existe la matriz límite $\mathbf{T} = \lim_{m\to\infty} \mathbf{P}^m$

  y cada una de sus filas es igual al vector fijo de probabilidad **t**

- Es decir que $\lim_{m\to\infty} \mathbf{p}^{(0)}\mathbf{P}^m = \mathbf{t}$, luego de muchos pasos la distribución de probabilidad del sistema es aproximadamente **t** y es llamada "*distribución estacionaria*" de la cadena.

-> Programita del ejemplo del ratón en la caja

- Defina estados y matriz de transición
- Calcular $p^{(2)}$, $p^{(3)}$
- Determinar la matriz de transición en tres pasos
- ¿Es P regular?
- Calcular el vector fijo de probabilidad para P

Considere la siguiente matriz de transición

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1- Dibuje el diagrama de transición entre estados

2- Escribir programa para explorar la dinámica

Cadenas de Markov absorbentes

- Estado absorbente – Una vez que el sistema alcanza E_i en cualquier paso, permanece ‘atrapado’ en él.
- Cadena de Markov absorbente – Si tiene al menos un estado absorbente y si es posible alcanzar un estado absorbente desde todo estado no-absorbente.

- Modelar el siguiente juego: dos jugadores comienzan con dos bolitas cada uno. En cada jugada el primer jugador tiene probabilidad p de ganar una bolita y probabilidad q=1-p de perder una bolita. El juego termina cuando uno de los jugadores perdió todas sus bolitas.

Otros casos

- Pensar otras opciones de fronteras en marcha aleatoria 1D

- Pensar otros modelos markovianos