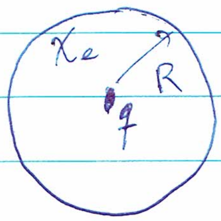
1)



a) $\nabla \cdot \vec{D} = \rho_f = q\,\delta(\vec{r})$

$\Rightarrow \oint \vec{D}\cdot\hat{n}\,da = q$

$\underset{D(r)4\pi r^2}{\parallel}$ por simetría esf. $\vec{D} = D(r)\,\hat{e}_r$

$\Rightarrow \vec{D}(\vec{r}) = \dfrac{q}{4\pi r^2}\hat{e}_r$

$$\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon}\vec{D} \Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{q}{4\pi\varepsilon r^2}\hat{e}_r & \text{si } r<R \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{e}_r & \text{si } r>R \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{P} = \begin{cases} \dfrac{\varepsilon_0 \chi_e q}{4\pi\varepsilon r^2}\hat{e}_r & \text{si } r<R \\ 0 & \text{si } r>R \end{cases}$$

b) $\vec{P}\cdot\hat{n} = \vec{P}\cdot\hat{e}_r \Big|_{r=R} = \boxed{\dfrac{\varepsilon_0 \chi_e q}{4\pi\varepsilon R^2} = \sigma_p}$

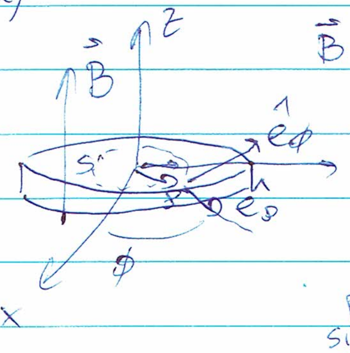
$\nabla\cdot\vec{P} = \boxed{\rho_p = -\dfrac{4\pi\delta(\vec{r})\varepsilon_0\chi_e q}{4\pi\varepsilon}}$

$\nabla\cdot\left(\dfrac{\hat{e}_r}{r^2}\right) = -4\pi\,\delta(\vec{r})$

c) $Q_{p_{sup}} = \int \sigma_p\,da = \dfrac{\varepsilon_0\chi_e}{\varepsilon}q$

d) El resto de la carga está en el origen apantallando q (ver b)) $\int \rho_p\,d^3\vec{r} = -\dfrac{\varepsilon_0\chi_e q}{\varepsilon}$

2) a)



$$\vec{B} = B_0 \cos(\omega t)\,\hat{k}$$

$$\oint_{\partial S} \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_{B,S}}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(B_0 \pi \rho^2 \cos(\omega t)\right) = B_0 \omega \pi \rho^2 \operatorname{sen}(\omega t)$$

$$\oint_{\partial S} \vec{E}\cdot d\vec{l} = E(\rho)\, 2\pi\rho$$

por simetría es $\vec{E}(\vec{r}) = E(\rho)\,\hat{e}_\phi$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{B_0 \omega \rho}{2} \operatorname{sen}(\omega t)\,\hat{e}_\phi}$$

$$\vec{J} = g\vec{E} = \boxed{\vec{J}(\vec{r},t) = \begin{cases} \dfrac{B_0 \omega \rho g}{2} \operatorname{sen}(\omega t)\,\hat{e}_\phi & \text{si } 0<z<w,\ \rho<R \\ 0 & \text{si no} \end{cases}}$$

b) para un anillo de radio ρ y sección $d\rho\,dz$ tenemos que circula una corriente $I = J(\rho)\,d\rho\,dz$ y la $\mathcal{E}$ en ese anillo es $\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = B_0 \omega \pi \rho^2 \operatorname{sen}(\omega t)$

$\Rightarrow$ ~~[illegible]~~

$\Rightarrow$ la energía disipada es $\mathcal{E}\cdot I = J(\rho)\,d\rho\,dz\; B_0 \omega \pi \rho^2 \operatorname{sen}(\omega t)$

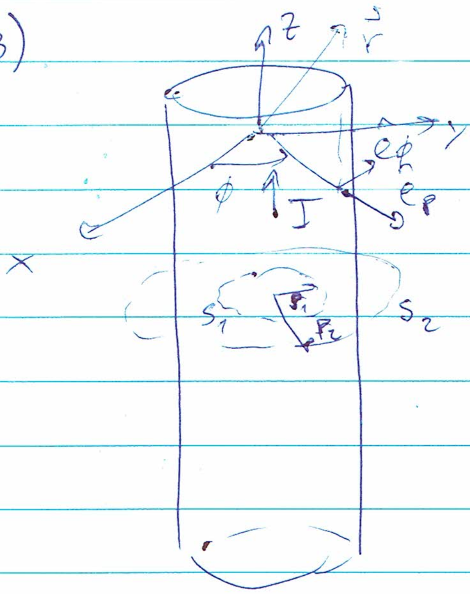
si sumamos para todos los anillos del disco es

$$P_{Joule} = \int_0^R\!\!\int_0^w \frac{B_0^2 \omega^2 g \pi \rho^3}{2} \operatorname{sen}^2(\omega t)\, d\rho\, dz = \frac{B_0^2 \omega^2 g\, w R^4 \pi \operatorname{sen}^2(\omega t)}{8}$$

también se puede obtener como:

$$\int \vec{J}\cdot\vec{E}\, d^3\vec{r}$$

3)



a) $\vec{J}_f = \dfrac{I}{\pi R^2}\hat{k}$

corriente I_f que atraviesa S

$$\oint_{\partial S} \vec{H}\cdot d\vec{\ell} = I_{f,S} = \begin{cases} J_f \pi \rho^2 & \text{si } \rho < R \\ J_f \pi R^2 & \text{si } \rho > R \end{cases}$$

por simetría $\vec{H}$ solo puede tener componente según $\hat{e}_\phi$ (y ser función de ρ)

$$\Rightarrow \vec{H}(\vec{r}) = H(\rho)\,\hat{e}_\phi$$

$$\Rightarrow H(\rho)\,2\pi\rho^2 = I_{f,S}$$

$$\Rightarrow \vec{H}(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{I\rho}{2\pi R^2}\hat{e}_\phi & \text{si } \rho < R \\ \dfrac{I}{2\pi\rho}\hat{e}_\phi & \text{si } \rho > R \end{cases}$$

b) $$\vec{B}(\vec{r}) = \mu\vec{H} = \begin{cases} \dfrac{\mu_0(1-\chi_m)I\rho}{2\pi R^2}\hat{e}_\phi & \text{si } \rho < R \\ \dfrac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\hat{e}_\phi & \text{si } \rho > R \end{cases}$$

$$\left(\mu = \begin{cases} \mu_0(1-\chi_m) & \rho < R \\ \mu_0 & \rho > R \end{cases}\right.$$

$\vec{M} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{diamag.}}}{-}\chi_m\vec{H}$

c) $$\vec{M} = -\chi_m\vec{H} \Rightarrow \vec{M} = \begin{cases} -\dfrac{\chi_m I\rho}{2\pi R^2}\hat{e}_\phi & \text{si } \rho < R \\ 0 & \text{si } \rho > R \end{cases}$$

$$\vec{J}_b = \nabla\times\vec{M} = -\frac{\chi_m I}{\pi R^2}\hat{k}$$

$$\vec{K}_b = \vec{M}\times\underset{\substack{\uparrow \\ n = \hat{e}_\rho}}{\hat{n}}\Big|_{\rho=R} = \frac{\chi_m I}{2\pi R}$$