Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Matemática II, módulo 2
Segundo semestre 2019

Examen. 13/12/2021.

Nombre:

Cédula:

Cada parte vale 20 puntos, el mínimo para aprobar es de 50 puntos.

Se considera la función $f(x,y) = xy\, e^{x+y}$. Se pide:

1. Calcular las derivadas parciales de f.
2. Hallar los puntos estacionarios de f.
3. Clasificar los puntos anteriores.
4. Hallar el máximo y mínimo absolutos de f en el cuadrado D de vértices $(0,0)$, $(-2,0)$, $(0,-2)$ y $(-2,-2)$. *Dato:* por si lo necesitan, vale $e^{-2} = 0,135$ y $e^{-3} = 0,049$.
5. Calcular **una (y solo una)** de las integrales siguientes:

   a) $\iint_J x\cos(x+xy)\, dxdy$, siendo $J = [0,\pi/2] \times [0,1]$.

   b) $\iint_I xy\, e^{x+y}\, dxdy$, siendo $I = [0,1] \times [0,1]$.

Nota: *En la resolución de los ejercicios se deben justificar todas las afirmaciones e incluir todos los cálculos que fueron necesarios para la misma.*

Solución

1. Las derivadas parciales son $f_x(x, y) = (1 + x)y\, e^{x+y}$ y $f_y(x, y) = (1 + y)x\, e^{x+y}$.

2. Los puntos estacionarios son $(-1, -1)$ y $(0, 0)$.

3. Las derivadas segundas son

$$f_{xx}(x, y) = (2 + x)y\, e^{x+y}, \quad f_{xy}(x, y) = (1 + x)(1 + y)\, e^{x+y}, \quad f_{yy}(x, y) = (2 + y)x\, e^{x+y}.$$

   Luego las matrices hessianas son

$$Hf(-1, -1) = \begin{pmatrix} -e^{-2} & 0 \\ 0 & -e^{-2} \end{pmatrix}; \quad Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Esto implica que f tiene un máximo relativo en $(-1, -1)$ y un punto de silla en $(0, 0)$.

4. Los lados de D se apoyan en las rectas $x = 0$, $x = -2$, $y = 0$ e $y = -2$.

   - Sobre las rectas $x = 0$ e $y = 0$ la función f vale cero.
   - En la recta $y = -2$ es $\alpha(x) = f(x, -2) = -2xe^{x-2}$. Su derivada es $\alpha'(x) = -2(x + 1)e^{x-2}$. Esto nos da el punto $(-1, -2)$.
   - En forma análoga en la recta $x = -2$ obtenemos el punto $(-2, -1)$.

   Los puntos a considerar son $(-1, -2)$, $(-2, -1)$ y $(-1, -1)$ y las rectas $x = 0$ e $y = 0$. Calculando obtenemos

$$f(-1, -2) = f(-2, -1) = 2e^{-3} \simeq 0,099; \qquad f(-1, -1) = e^{-2} \simeq 0,135.$$

   Luego el mínimo de f es cero y los alcanza en los lados $x = 0$ e $y = 0$, y el máximo es e^{-2} y lo alcanza en $(-1, -1)$.

5. *a*)

$$\begin{aligned}
\iint_J x\cos(x + xy)\, dxdy &= \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^1 x\cos(x + xy)\, dy \right) dx = \int_0^{\pi/2} \left(\operatorname{sen}(x + xy)\Big|_{y=0}^{y=1} \right) dx \\
&= \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}(2x) - \operatorname{sen}(x)\, dx = -\frac{\cos(2x)}{2} + \cos(x)\Big|_0^{\pi/2} \\
&= -\frac{\cos(\pi)}{2} + \cos(\pi/2) - \frac{1}{2} = 0.
\end{aligned}$$

   b)

$$\begin{aligned}
\iint_I xye^{x+y}\, dxdy &= \int_0^1 \left(\int_0^1 xye^{x+y}\, dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^1 xye^x e^y\, dy \right) dx \\
&= \int_0^1 xe^x \left(\int_0^1 ye^y\, dy \right) dx = \int_0^1 xe^x \left((y - 1)e^y\Big|_{y=0}^{y=1} \right) dx = \int_0^1 xe^x\, (1)\, dx \\
&= \int_0^1 xe^x\, dx = 1.
\end{aligned}$$

   En el cálculo anterior usamos $\int xe^x\, dx = (x - 1)e^x$, que se obtiene integrando por partes.