Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Matemática II, módulo 2

Examen. *23/02/2022*

El examen dura dos horas. El mínimo para aprobar es de 50 puntos.

1. (**40 puntos**)
   En lo que sigue por "recta que mejor aproxima a los puntos" nos referimos a la que se obtiene mediante el método de mínimos cuadrados.

   a) Hallar la recta que mejor aproxima a los puntos $(-1,-3)$, $(0,-2)$ y $(1,2)$.

   b) Hallar α y β para que la recta que mejor aproxime a los puntos $(0,\alpha)$, $(1,\beta)$ y $(2,1)$ sea $y=2x-3$.

2. (**60 puntos**)
   Se considera la función $f(x,y)=x-2y$ y el conjunto T limitado por las rectas $y=0$, $y=x$, $x+y=2$.

   a) Hallar las derivadas direccionales de f en el punto $p=(1,1)$ en la dirección del vector $v=(3,-4)$.

   b) Dibujar el conjunto T.

   c) Calcular $\iint_T f(x,y)\,dxdy$.

Nota: *en la resolución de los ejercicios se deben justificar todas las afirmaciones e incluir todos los cálculos que fueron necesarios para la misma.*

Solución

1. *a*)

	x	y	x^2	xy
	-1	-3	1	3
	0	-2	0	0
	1	2	1	2
$\sum$	0	-3	2	5

$$\Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} 2a+0b & = & 5 \\ 0a+3b & = & -3 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad a=\frac{5}{2},\ b=-1 \quad \Rightarrow \quad y=\frac{5}{2}x-1.$$

b)

	x	y	x^2	xy
	0	α	0	0
	1	β	1	β
	2	1	4	2
$\sum$	3	$\alpha+\beta+1$	5	$\beta+2$

$$\Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} 5\times 2+3\times(-3) & = & \beta+2 \\ 3\times 2+3\times(-3) & = & \alpha+\beta+1 \end{array} \right. \quad \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 1 & = & \beta+2 \\ -3 & = & \alpha+\beta+1 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \beta=-1,\ \alpha=-3.$$

2. *a*) Usando la fórmula $D_{v_0}f(p)=\frac{1}{\|v\|}\left(v_1\frac{\partial f}{\partial x}(p)+v_2\frac{\partial f}{\partial y}(p)\right)$, obtenemos

$$D_{v_0}f(p)=\frac{1}{5}\left(3\times 1-4\times(-2)\right)=\frac{11}{5}.$$

b) El conjunto T es un triángulo de vértices $(0,0)$, $(2,0)$ y $(1,1)$.

c) Mostramos dos formas de hacer el cálculo.

$$\begin{aligned}
\iint_T x-2y\,dxdy &= \int_0^1\left(\int_y^{2-y} x-2y\,dx\right)dy=\int_0^1\left(\frac{x^2}{2}-2xy\Big|_{x=y}^{x=2-y}\right)dy \\
&= \int_0^1 \frac{(2-y)^2}{2}-2(2-y)y-\left(\frac{y^2}{2}-2y^2\right)dy=\int_0^1 4y^2-6y+2\,dy=\frac{1}{3}. \\
\iint_T x-2y\,dxdy &= \int_0^1\left(\int_0^x x-2y\,dy\right)dx+\int_1^2\left(\int_0^{2-x} x-2y\,dy\right)dx \\
&= \int_0^1\left(xy-y^2\Big|_{y=0}^{y=x}\right)dx+\int_1^2\left(xy-y^2\Big|_{y=0}^{y=2-x}\right)dx \\
&= 0+\int_1^2\left(x(2-x)-(2-x)^2-0\right)dx \\
&= \int_1^2 -x^2+3x-2\,dx=-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-2x\Big|_1^2=\frac{1}{3}.
\end{aligned}$$