Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Matemática 2. Módulo 2
Curso 2021

Nombre:
Cédula:

Parcial de Matemática II, módulo 2. Versión A.

1. **(60 puntos).** Se considera la función $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2$.

   a) Hallar los puntos estacionarios de f.

   b) Clasificar los puntos anteriores.

   c) Hallar el máximo y mínimo absolutos de f en el triángulo limitado por los ejes coordenados y la recta $x + y = 3$.

2. **(40 puntos).**

   a) Dibujar el conjunto $D = \{(x,y) : \ x^2 + y^2 < 1, \ x > 0, \ y > 0\}$.

   b) Calcular $\iint_D y^3 \ dxdy$.

Nota: en la resolución de los ejercicios se deben justificar todas las afirmaciones e incluir todos los cálculos que fueron necesarios para la misma.

Solución.

1. *a*) Es $f_x(x,y) = 2x - 2$ y $f_y(x,y) = 2y - 2$. El único punto estacionario es $(1,1)$.

   b) La matriz hessiana de f en $(1,1)$ es $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$. Luego en $(1,1)$ hay un mínimo relativo.

   c) Los puntos en los que puede haber un extremo son los siguientes.

   - Extremos relativos: $(1,1)$.
   - Vértices: $(0,0)$, $(3,0)$ y $(0,3)$.
   - Aristas: $(0,1)$, $(1,0)$ y $(3/2, 3/2)$.

   El máximo absoluto es $1 = f(0,3) = f(3,0)$ y el mínimo absoluto es $-4 = f(1,1)$.

2. *a*)

   b)

$$\iint_D y^3 \, dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} y^3 \, dy \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{y^4}{4} \bigg|_0^{\sqrt{1-x^2}} \right) dx = \frac{1}{4} \int_0^1 \left(\sqrt{1-x^2} \right)^4 dx$$
$$= \frac{1}{4} \int_0^1 \left(1 - x^2\right)^2 dx = \frac{1}{4} \int_0^1 1 - 2x^2 + x^4 \, dx = \frac{2}{15}.$$