Parcial 2 – Relatividad General 2021

1. **Velocidad de escape:**

Una partícula de masa m es lanzada radialmente hacia afuera desde la superficie de una esféricamente simétrica estrella de neutrones de masa $M=1{,}4\,M_{Sol}=2{,}1\,km$. La geometría del espacio tiempo exterior a la estrella de neutrones esta descrita por la solución de Schwarzschild

$$ds^2=-\left(1-\frac{2M}{r}\right)dt^2+\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}dr^2+r^2\left(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2\right)$$

y la superficie de la estrella de neutrones se encuentra en $r=r_0=11\,km$.

a) Si no tiene ninguna propulsión luego del instante de su lanzamiento ¿cuál es la energía mínima que tiene que tener la partícula inmediatamente luego del lanzamiento en la base de coordenadas de Schwarzschild para poder escapar hasta el infinito (para poder llegar a r arbitrariamente grande)?

b) Evalúa la energía en una base ortonormal de un referencial en reposo en la superficie de la estrella de neutrones, es decir con vector base de tiempo paralelo a ∂_t . Evalúa la norma en este referencial de la 3-velocidad mínima que debe tener la partícula para escapar hasta el infinito.

2. **Un poco de cosmología:**

En modelos cosmológicos a menudo se aproxima el Universo como homogéneo e isotrópico. En un importante caso especial de estos modelos el 3-espacio es plano y la materia es un polvo. En coordenadas t, x, y, z adecuadas el elemento de línea toma la forma

$$ds^2=-dt^2+a(t)^2\left(dx^2+dy^2+dz^2\right)$$

y las partículas del polvo están en reposo, es decir, cada uno mantiene x, y, z constante. Lo único que cambia en el tiempo es el factor de escala a .

a) Demuestra que el elemento de línea $ds^2=-dt^2+a(t)^2\left(dx^2+dy^2+dz^2\right)$ implica los siguientes símbolos de Christoffel:

$$\Gamma^t_{ij}=\dot{a}\,a\,\delta_{ij} \quad , \quad \Gamma^i_{jt}=\Gamma^i_{tj}=\frac{\dot{a}}{a}\delta^i_j \quad .$$

Los demás símbolos de Christoffel son cero.

b) Escribe el tensor de estrés energía $T^{\mu\nu}$ del polvo en las coordenadas t, x, y, z en términos de la densidad espacial de masa ρ en estas coordenadas ($c=1$). Demuestra que la ecuación de conservación local, $D_\mu T^{\mu\nu}=0$, implica que

$$\frac{d}{dt}[\rho a^3]=0 \quad . \tag{1}$$

c) Evalúa los componentes R_{tt} y R_{ij} del tensor de Ricci.

El cálculo es relativamente corto si se aprovecha de los hechos que solo pocos símbolos de Christoffel son no-cero, que todas las magnitudes dependen solo de t, y que algunos componentes del tensor de Riemann son cero debido a las simetrías del mismo.

d) Evalúa el componente $G_{tt}=R_{tt}-\frac{1}{2}g_{tt}R$ del tensor de Einstein y demuestra que la correspondiente ecuación de Einstein implica que (en unidades tal que el constante de Newton es 1)

$$\dot{a}^2=\frac{8\pi\rho}{3}a^2 \quad . \qquad (2)$$

(Los demás ecuaciones de Einstein son redundantes con (1) y (2).)

Fórmulas útiles:

Símbolos de Christoffel $\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}=\frac{1}{2}g^{\sigma\lambda}[\partial_\mu g_{\nu\lambda}+\partial_\nu g_{\mu\lambda}-\partial_\lambda g_{\mu\nu}]$.

Tensor de Riemann $R^{\sigma}_{\mu\tau\nu}=\partial_\tau\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}-\partial_\nu\Gamma^{\sigma}_{\mu\tau}+\Gamma^{\sigma}_{\tau\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}-\Gamma^{\sigma}_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\mu\tau}$.

Tensor de Ricci $R_{\mu\nu}=R^{\sigma}_{\mu\sigma\nu}$.

Escalar de Ricci $R=g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$.

Es un hecho interesante que las mismas ecuaciones (1) y (2) se pueden deducir a partir de la teoría Newtoniana de gravedad. Newton no lo hizo, tal vez porque no pensaba en términos del principio de equivalencia de Einstein aunque su teoría satisface este principio (con la relatividad de Galileo en lugar de Relatividad Especial).

Consideramos de nuevo el mismo polvo de partículas de densidad de masa ρ uniforme, libres salvo por fuerzas gravitacionales, pero ahora dentro del marco de la teoría de Newton. Supongamos, ademas, que este polvo realiza una expansión (o contracción) homogénea e isotropica caracterizado por el factor de escala $a(t)$.

Adoptemos cualquier partícula del polvo como nuestra *partícula de referencia* y centro del Universo. El principio de equivalencia nos permite usar el referencial en caída libre (y sin rotación) solidario con esta partícula de referencia como el referencial inercial en el cual aplicar la ley de gravedad de Newton.

Aplicamos entonces esta ley a las partículas en una pequeña esfera de radio $a(t)r_0$ entorno a la partícula de referencia. La distribución de masa es esféricamente simétrica entorno a la partícula de referencia (como entorno a cualquier punto). Por lo tanto el polvo afuera de la esfera no ejerce ninguna fuerza neta sobre el polvo en el interior, y la fuerza gravitacional sobre una partícula en la superficie de la esfera, producida enteramente por la materia en el interior, es la misma como si toda la masa de la esfera fuera concentrado en el centro. El problema se reduce entonces a uno de una partícula de prueba moviendo radialmente en el campo de una masa central.

e) Demuestra que la conservación de masa del polvo implica que $\frac{d}{dt}[\rho a^3]=0$.

f) Calcula la aceleración de una partícula en la superficie de la esfera, y de esto desprenda la segunda derivada de $a(t)$. La ley de movimiento de la partícula conserva la suma de energía cinética y potencial. Demuestra que ecuación (2) corresponde a esta ley de conservación en el caso que la energía total es cero. (Si la energía es no cero la resultante ecuación de conservación es correcta en relatividad general pero no corresponde al caso de un 3-espacio plano.)

La interpretación Newtoniana de las ecuaciones (1) y (2) nos dice que en sus soluciones el Universo empieza con una explosión, y luego expande, con velocidad asintótica cero.