SOLUCION PARCIAL 2 Relatividad General 2021

1) a) $E = p^t = m \frac{dt}{d\tau}$.

La partícula mueve en una geodesica. Entonces conserva

$$p_t = g_{t\mu} p^\mu = g_{tt} p^t = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) E$$

El valor mínimo que E puede tener en $r = \infty$ es m, ya que allí $d\tau = \sqrt{1-v^2}\, dt \Rightarrow \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \geq 1$. Por lo tanto para poder llegar al ∞.

$$-p_t \geq m$$

Entonces en la superficie de la estrella de neutrones

$$E \geq \frac{m}{1 - \frac{2M}{r}} = \frac{m}{1 - \frac{2 \cdot 2.1\,km}{11\,km}} = m \frac{11}{6.8} = 1.62\, m$$

b) Sean $e_{\hat{t}} = \frac{1}{\sqrt{-g_{tt}}} \partial_t$ $\quad e_{\hat{i}} = \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}} \partial_i$. Esto es una base ON con $e_{\hat{0}}$ paralelo a ∂_t

La energía con respecto a este referencial es

$$\hat{E} = p^{\hat{t}} = -p_{\hat{t}} = -g(e_{\hat{t}}, p) = -\frac{1}{\sqrt{-g_{tt}}} g(\partial_t, p)$$

ON Lorentziano

$$= -\frac{g_{tt}}{\sqrt{-g_{tt}}} p^t$$

$$\geq \frac{m}{\sqrt{-g_{tt}}} = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{2M}{r}}}$$

Pero en una base ON $E = \frac{m}{\sqrt{1-v^2}}$ con v la 3-velocidad

$$\Rightarrow v^2 \geq \frac{2M}{r} \Rightarrow \|\vec{v}\| \geq \sqrt{\frac{2M}{r}} = \sqrt{\frac{4.2}{11}} = 0.62$$ para escapar a ∞.

(si se usó $M = 4.2\,km$ $\|\vec{v}\| \geq 0.87$)

② a) $\Gamma^{t}_{\;ij} = \frac{1}{2} g^{t\sigma} \{ \partial_i g_{j\sigma} + \partial_j g_{i\sigma} - \partial_\sigma g_{ij} \}$

$= -\frac{1}{2} g^{tt} \partial_t g_{ij} = -\frac{1}{2}(-1) \partial_t a^2 \delta_{ij} = a \dot{a} \delta_{ij}$

$\Gamma^{i}_{\;jt} = \frac{1}{2} g^{i\sigma} \{ \partial_j g_{t\sigma} + \partial_t g_{j\sigma} - \partial_\sigma g_{jt} \}$

$= \frac{1}{2} g^{ik} \partial_t g_{jk} = \frac{1}{2} \frac{1}{a^2} \delta^{ik} \partial_t a^2 \delta_{jk} = \frac{\dot{a}}{a} \delta^{i}_{j}$

b) $T^{\mu\nu} = \Delta u^\mu u^\nu$ con Δ densidad de masa en referencia Lorentziano de reposo

$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \delta^\mu_0$ para particulas porque x^i son constantes sobre particulas

Sobre linea mundo de particula, x^i constante $d\tau^2 = -ds^2 = dt^2$

$\Rightarrow \frac{dt}{d\tau} = 1$ (— contamos τ creciendo hacia el futuro)

$\Rightarrow T^{\mu\nu} = \Delta \delta^\mu_0 \delta^\nu_0$

$\rho = T^{00} \Rightarrow T^{\mu\nu} = \rho \delta^\mu_0 \delta^\nu_0$

$T_{\mu\nu} = g_{\mu\sigma} g_{\nu\lambda} T^{\sigma\lambda} = g_{\mu 0} g_{\nu 0} \rho = \delta^0_\mu \delta^0_\nu \rho$

$0 = D_\mu T^{\mu\nu} = \partial_\mu T^{\mu\nu} + \Gamma^\mu_{\mu\sigma} T^{\sigma\nu} + \Gamma^\nu_{\mu\sigma} T^{\mu\sigma}$

$= \partial_0 \rho \, \delta^\nu_0 + \Gamma^\mu_{\mu 0} \rho \, \delta^\nu_0 + \Gamma^\nu_{00} \rho$

$= [\partial_t \rho + 3 \frac{\dot{a}}{a} \rho] \delta^\nu_0$

$\Leftrightarrow 0 = \frac{1}{a^3} \partial_t (\rho a^3) \Leftrightarrow \partial_t (\rho a^3) = 0$

c) $R_{tt} = R^{\sigma}{}_{t\sigma t} = R^{i}{}_{tit} = \partial_i \overset{\overset{0}{\shortparallel}}{\Gamma^i_{tt}} - \partial_t \Gamma^i_{ti} + \Gamma^i_{i\lambda} \overset{\overset{0}{\shortparallel}}{\Gamma^\lambda_{tt}} - \Gamma^i_{t\lambda}\Gamma^\lambda_{ti}$

$= -\partial_t\left(\frac{\dot a}{a} 3\right) - \Gamma^i_{tj}\Gamma^j_{ti}$

$= -3\ \partial_t\left(\frac{\dot a}{a}\right) - \left(\frac{\dot a}{a}\right)^2 \delta^i{}_j \delta^j{}_i \quad = -3\left(\frac{\ddot a}{a} - \frac{\dot a^2}{a^2}\right) - 3\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2$

$= -3\ \frac{\ddot a}{a}$

$R_{ij} = R^{\sigma}{}_{i\sigma j} = \partial_\sigma \Gamma^\sigma_{ij} - \partial_j \Gamma^\sigma_{i\sigma} + \Gamma^\sigma_{\sigma\lambda}\Gamma^\lambda_{ij} - \Gamma^\sigma_{j\lambda}\Gamma^\lambda_{i\sigma}$

$= \partial_t \Gamma^t_{ij} + \Gamma^k_{kt}\Gamma^t_{ij} - \Gamma^t_{jk}\Gamma^k_{it} - \Gamma^k_{jt}\Gamma^t_{ik}$

$= \partial_t(\dot a a)\,\delta_{ij} + 3\,\frac{\dot a}{a}\,a\dot a\,\delta_{ij} - \frac{\dot a}{a}\,a\dot a\,\delta_{jk}\delta^k_i - \frac{\dot a}{a}\,a\dot a\,\delta_{ik}\delta^k_j$

$= \partial_t(\dot a a)\,\delta_{ij} + 3\dot a^2\,\delta_{ij} - \dot a^2\,\delta_{ij} - \dot a^2\,\delta_{ij}$

$= \left(\partial_t(\dot a a) + \dot a^2\right)\delta_{ij}$

$= \left(\ddot a a + 2\dot a^2\right)\delta_{ij}$

d) $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = -R_{tt} + \frac{1}{a^2}\delta^{ij}R_{ij}$

$= 3\,\frac{\ddot a}{a} + 3\,\frac{\ddot a}{a} + 6\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2$

$= 6\left[\frac{\ddot a}{a} + \left(\frac{\dot a}{a}\right)^2\right]$

$G_{tt} = R_{tt} - \frac{1}{2}g_{tt}R = -3\,\frac{\ddot a}{a} + \frac{1}{2}\,6\left(\frac{\ddot a}{a} + \left(\frac{\dot a}{a}\right)^2\right)$

$= 3\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2$

La ecuación de Einstein es $G_{\mu\nu} = 8\pi\, T_{\mu\nu}$ con $(G_{Newton} = 1)$

$\Rightarrow\ 3\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2 = G_{tt} = 8\pi\, T_{tt} = 8\pi\rho$

$\Rightarrow\ \dot a^2 = \frac{8\pi}{3}\rho\, a^2$

e) Una esfera de radio $a(t)\,r_o$ contiene siempre las mismas partículas

(Las partículas estan en x^i constante entonces una esfera con $x^2+y^2+z^2 \leq r_o^2$ siempre contiene las mismas partículas. Esta esfera tiene radio geométrico $r = a r_o$.)

La masa total en esta esfera es

$$M = \frac{4\pi}{3} r^3 \rho = \frac{4\pi}{3} r_o^3\, a^3 \rho$$

Esta masa es conservada, entonces $a^3\rho$ lo es. $\frac{d}{dt}(a^3\rho) = 0$.

f) $$\text{aceleración} = \frac{d^2 r}{dt^2} = \ddot{a} r_o = -\frac{GM}{r^2} = -G\frac{4\pi}{3}\frac{r^3}{r^2}\rho = -G\frac{4\pi}{3} r\rho$$

$$= -\frac{4\pi G}{3} r_o\, a\rho$$

con $G = 1$ $$\ddot{a} = -\frac{4\pi}{3} a\rho$$

La energía total conservada por unidad de masa de la partícula en la superficie es

$$\frac{E}{m} = \frac{1}{2}(\dot{a} r_o)^2 - \frac{GM}{a r_o}$$

(Verificamos que la ecⁿ para la aceleración y la conservación de masa implica que esto se conserva: $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}(\dot{a} r_o)^2 - \frac{GM}{a r_o}\right)$

$$= \frac{1}{2}\, 2\, \dot{a}\ddot{a}\, r_o^2 + \frac{GM}{a^2 r_o}\dot{a} = \dot{a} r_o\left(\ddot{a} r_o + \frac{GM}{a^2 r_o^2}\right) = 0 \;\checkmark.)$$

Ponemos $E = 0$ y $G = 1$

$$0 = \dot{a}^2 - \frac{2M}{a r_o^3} = \dot{a}^2 - \frac{\frac{8\pi}{3}\rho a^3 \cancel{r_o^3}}{a \cancel{r_o^3}} = \dot{a}^2 - \frac{8\pi}{3}\rho a^2$$