Parcial 1 – Relatividad General 2021

1. **Referencial uniformemente acelerado en relatividad especial**: Debido a la contracción de longitudes de Fitzgerald-Lorentz, en relatividad especial la parte atrás de un cohete debe acelerar mas rápido que la de adelante para que mantenga la misma longitud en su referencial de reposo. Así el concepto de referencial uniformemente acelerado no es tan sencillo en esta teoría como en la Newtoniana. Sin embargo, hay una muy útil definición de referencial uniformemente acelerada en relatividad especial. Esta está definida por la carta (ψ, L), relacionada a una carta Lorentziana $Z^\alpha=(t,x)$ por la transformación $t=L\sinh\psi$, $x=L\cosh\psi$. (Trataremos el tema en un espacio tiempo de dos dimensiones.)

a) Realiza un croquis de las curvas $L=constante$ y $\psi=constante$ en el plano t,x . Halla la derivada $\dfrac{d\tau}{d\psi}$ del tiempo propio τ a lo largo de la línea mundo definida por L constante. Además, encuentra a la relación entre la coordenada L y la distancia propia s medida desde el origen a lo largo de la curva ψ constante.

b) Suponga que una partícula sigue a la línea mundo de L constante. Halla la velocidad espacio temporal $u^\alpha=\dfrac{dZ^\alpha}{d\tau}$ como función de ψ . Halla un boost a un referencial Lorentziano, $Y^\theta=(t',x')$, de reposo instantáneo de la particula en $\psi=\psi_0$. Expresa t' y x' en términos de L , ψ , y ψ_0 .
Recuerda que los matrices Jacobianos de boosts son de la forma

$$\begin{bmatrix}\cosh\varphi & \sinh\varphi\\ \sinh\varphi & \cosh\varphi\end{bmatrix}$$

y que

$$\cosh(\psi+\varphi)=\cosh\psi\cosh\varphi+\sinh\psi\sinh\varphi \quad , \quad \sinh(\psi+\varphi)=\sinh\psi\cosh\varphi+\cosh\psi\sinh\varphi \quad .$$

Verifica que $t'=0$ cuando $\psi=\psi_0$.

c) Evalúa la aceleración $\dfrac{d^2x'}{dt'^2}$ en $t'=0$ y nota que es independiente del valor de ψ_0 , es decir, que la aceleración en el referencial de reposo instantáneo es constante.
Ahora suponga que un cohete es acelerado tal que cada parte del cohete mantiene su L constante. Demuestra que todas las partes del cohete están en reposo en $t'=0$ en el referencial de reposo instantáneo de la punta del cohete, y que la longitud del cohete en $t'=0$ es independiente del valor de ψ_0 .

d) Evalúa el elemento de línea ds^2 (la longitud propia cuadrada de un desplazamiento infinitesimal arbitrario) en términos de $d\psi$ y dL . Determina los componentes de la métrica en la carta (ψ, L) . Esta carta, con $L\geq 0$ cubre una región del espacio tiempo de Minkowski. Indica esta región en el croquis de la parte a). *La carta se llama a veces "coordenadas de Rindler" y la región del espacio tiempo de Minkowski que cubren se llama la "cuna de Rindler" o "espacio de Rindler".*

e) Un cuerpo en reposo en un valor fijo de $x=x_0>0$ está radiando luz en el sentido de x creciente con frecuencia ω . La fase de la onda de luz es $e^{i\theta}\equiv e^{i\omega(x-t)}$. La luz es recibida por un observador que sigue una trayectoria acelerada $L=L_0=constante$ (con $L_0>x_0$).

Expresa a la fase que observa el observador como función de ψ y como función de su tiempo propio τ .

1. ¿Cual es la frecuencia $\omega'=\frac{d\theta}{d\tau}$ vista por el observador?
2. El observador ¿ve al cuerpo radiante salir de la cuna de Rindler?

3. Supongamos que el cuerpo emite n fotones por unidad de tiempo t . ¿Cuál es la energía de un fotón recibido por el observador? ¿Cuál es la energía recibida por el observador por unidad de tiempo propio?
4. ¿En aproximadamente cuál valor del tiempo propio el observador recibe el último fotón desde el cuerpo? Toma el cero del tiempo propio simultáneo con $t=0$.

El referencial uniformemente acelerado relativista describe bien a la región del espacio tiempo cerca del horizonte de un agujero negro estático, con L *la distancia desde el horizonte y* ψ *una coordenada de tiempo tal que los componentes de la métrica son independientes de* ψ *, es decir, tal que un desplazamiento uniforme* $(\psi,L)\rightarrow(\psi+\Delta\psi,L)$ *es una isometría. El cuerpo radiante entonces corresponde a un cuerpo radiante cayendo a través del horizonte, y el observador a un observador fuera del agujero negro manteniendo una distancia fija desde el horizonte.*

2. **Sincronización de relojes y caída libre**: Dos relojes idénticos, fijados a los dos extremos de una regla de longitud r en reposo en ausencia de gravedad, están inicialmente sincronizados en el sentido de que visto (con luz) desde el punto medio de la regla ambos relojes marcan el mismo tiempo.

a) Demuestra que si la regla adquiere una aceleración a paralela a si mismo entonces el reloj más adelante en el sentido de la aceleración empieza a adelantarse al otro reloj. Calcula la razón entre las frecuencias de los dos relojes vistos desde el punto medio de la regla hasta primer orden en $ra=ra/c^2$. Se puede usar la cinemática relativista de problema 1, pero también la cinemática Newtoniana alcanza.

Según el Principio de Equivalencia de Einstein, si la regla cae libremente en un campo gravitatorio los relojes siguen sincronizados . *Esto es análogo a como un auto viaja en una línea recta sobre un plano, o en una geodésica sobre terreno ondulado, si las ruedas por ambos lados ruedan la misma distancia.*

b) Confirma que esto es así si la acción para una partícula libre en un campo gravitatorio es $I=\int d\tau=\int L\,d\lambda$, con $L=\sqrt{-g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu}$, x^μ una carta, y $\dot{}$ denota una derivada en λ . Específicamente,

1. calcula la variación δI de la acción *suponiendo* que la línea mundo $x^\mu(\lambda)$ satisface la ecuación de Euler-Lagrange $\frac{d}{d\lambda}\left[\frac{\partial L}{\partial\dot{x}^\mu}\right]-\frac{\partial L}{\partial x^\mu}=0$ pero permitiendo que los puntos inicial y final varían, es decir δx^μ puede ser no cero en $\lambda_{inicial}$ y λ_{final} .

2. Interpreta $x^\mu(\lambda)$ como la línea mundo del centro de la regla y $x^\mu(\lambda)\pm\delta x^\mu(\lambda)$ como las líneas mundo de los relojes en las puntas de la regla, que se supone infinitesimal. Y suponga que los eventos $x^\mu(\lambda_{inicial})$ y $x^\mu(\lambda_{inicial})\pm\delta x^\mu(\lambda_{inicial})$ son todos simultáneos en un referencial Lorentziano local de reposo instantáneo del centro de la regla en $\lambda_{inicial}$, y que los eventos $x^\mu(\lambda_{final})$ y $x^\mu(\lambda_{final})\pm\delta x^\mu(\lambda_{final})$ son todos simultáneos de la misma manera en λ_{final} .
Demuestra que los tiempos propios transcurridos por las líneas mundo de los dos relojes son iguales (hasta primer orden en la longitud de la regla), y por tanto que si los relojes fueron sincronizados inicialmente entonces siguen estando sincronizados al final.