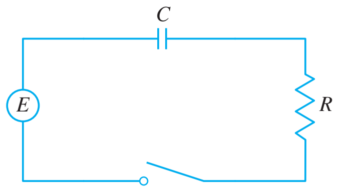
e) Si la carga inicial es $Q(0) = 0$ C, emplee el método de Euler con tamaño de paso 0.1 para estimar la carga después de medio segundo.



28. En el ejercicio 14 en la sección 9.1 se consideró una taza de café a 95 °C en una habitación a 20 °C. Suponga que se sabe que la taza de café se enfría a razón de 1 °C por minuto cuando su temperatura es 70 °C.

a) En este caso, ¿en qué se convierte la ecuación diferencial?

b) Bosqueje un campo direccional y utilícelo para trazar la curva solución para el problema con valores iniciales. ¿Cuál es el valor límite de la temperatura?

c) Use el método de Euler con tamaño de paso $h = 2$ minutos para estimar la temperatura del café después de 10 minutos.

9.3 Ecuaciones separables

Se han considerado ecuaciones diferenciales de primer orden desde un punto de vista geométrico (campos direccionales) y desde un punto de vista numérico (método de Euler). ¿Qué hay acerca del punto de vista simbólico? Sería bueno tener una fórmula explícita para una solución de una ecuación diferencial. Desafortunadamente, eso no siempre es posible. Pero en esta sección se examina cierto tipo de ecuación diferencial que se *puede* resolver de manera explícita.

Una **ecuación separable** es una ecuación diferencial de primer orden en que la expresión para dy/dx se puede factorizar como una función de x y una función de y. En otras palabras, se puede escribir en la forma

$$\frac{dy}{dx} = g(x)f(y)$$

El nombre *separable* viene del hecho de que la expresión del lado derecho se puede "separar" en una función de x y una función de y. De manera equivalente, si $f(y) \neq 0$, se podría escribir

$$\boxed{1} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}$$

donde $h(y) = 1/f(y)$. Para resolver esta ecuación se reescribe en la forma diferencial

$$h(y)\,dy = g(x)\,dx$$

de modo que las y estén de un lado de la ecuación y las x estén del otro lado. Después se integran ambos lados de la ecuación:

$$\boxed{2} \qquad \int h(y)\,dy = \int g(x)\,dx$$

La técnica para resolver ecuaciones diferenciales separables fue utilizada primero por James Bernoulli (en 1690) para resolver un problema acerca de péndulos y por Leibniz (en una carta a Huygens en 1691). John Bernoulli explicó el método general en un documento publicado en 1694.

La ecuación 2 define y implícitamente como una función de x. En algunos casos se podría resolver para y en términos de x.

Se emplea la regla de la cadena para justificar este procedimiento: si h y g satisfacen $\boxed{2}$, entonces

$$\frac{d}{dx}\left(\int h(y)\,dy\right) = \frac{d}{dx}\left(\int g(x)\,dx\right)$$

por tanto, $$\frac{d}{dy}\left(\int h(y)\,dy\right)\frac{dy}{dx} = g(x)$$

y $$h(y)\frac{dy}{dx} = g(x)$$

Así, se satisface la ecuación 1.

EJEMPLO 1

a) Resuelva la ecuación diferencial $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2}{y^2}$.

b) Encuentre la solución de esta ecuación que satisface la condición inicial $y(0) = 2$.

SOLUCIÓN

a) Se expresa la ecuación en términos de diferenciales y se integran ambos lados:

$$y^2\,dy = x^2\,dx$$

$$\int y^2\,dy = \int x^2\,dx$$

$$\tfrac{1}{3}y^3 = \tfrac{1}{3}x^3 + C$$

La figura 1 muestra las gráficas de varios miembros de la familia de soluciones de la ecuación diferencial del ejemplo 1. La solución del problema de valor inicial del inciso b) se muestra en rojo.

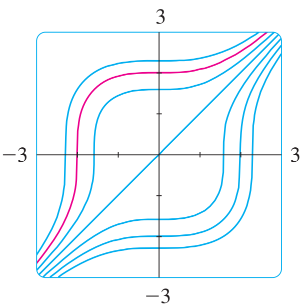


FIGURA 1

donde C es una constante arbitraria. (Se podría haber usado una constante C_1 del lado izquierdo y otra constante C_2 del lado derecho. Pero luego se combinan estas dos constantes al escribir $C = C_2 - C_1$.)

Al despejar y, se obtiene

$$y = \sqrt[3]{x^3 + 3C}$$

Se podría dejar la solución de esta manera o se podría escribir en la forma

$$y = \sqrt[3]{x^3 + K}$$

donde $K = 3C$. (Puesto que C es una constante arbitraria, K también lo es.)

b) Si hacemos $x = 0$ en la solución general del inciso a), se obtiene $y(0) = \sqrt[3]{K}$. Para satisfacer la condición inicial $y(0) = 2$, se debe tener $\sqrt[3]{K} = 2$, por tanto, $K = 8$. Así, la solución del problema con valores iniciales es

$$y = \sqrt[3]{x^3 + 8}$$

Algunos sistemas algebraicos computacionales grafican curvas definidas por ecuaciones implícitas. En la figura 2 se muestran las gráficas de varios miembros de la familia de soluciones de la ecuación diferencial del ejemplo 2. Como se ve en las curvas de izquierda a derecha, los valores de C son 3, 2, 1, 0, -1, -2 y -3.

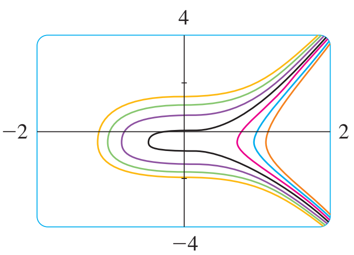


FIGURA 2

V EJEMPLO 2 Resuelva la ecuación diferencial $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{6x^2}{2y + \cos y}$.

SOLUCIÓN Al escribir la ecuación en forma diferencial e integrar ambos lados, se tiene

$$(2y + \cos y)\,dy = 6x^2\,dx$$

$$\int (2y + \cos y)\,dy = \int 6x^2\,dx$$

$$y^2 + \operatorname{sen} y = 2x^3 + C \tag{3}$$

donde C es una constante. La ecuación 3 da la solución general en forma implícita. En este caso, es imposible resolver la ecuación para expresar y de forma explícita como una función de x.

EJEMPLO 3 Resuelva la ecuación $y' = x^2 y$.

SOLUCIÓN Primero se reescribe la ecuación utilizando la notación de Leibniz:

$$\frac{dy}{dx} = x^2 y$$

Si una solución y es una función que satisface $y(x) \neq 0$ para alguna x, se deduce del teorema de unicidad para soluciones de ecuaciones diferenciales que $y(x) \neq 0$ para toda x.

Si $y \neq 0$, podemos reescribirla en forma diferencial e integrar:

$$\frac{dy}{y} = x^2\,dx \qquad y \neq 0$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int x^2\,dx$$

$$\ln|y| = \frac{x^3}{3} + C$$

Esta ecuación define y de manera implícita como una función de x. Pero en este caso podemos resolverla de forma explícita para y como sigue:

$$|y| = e^{\ln|y|} = e^{(x^3/3)+C} = e^C e^{x^3/3}$$

por tanto,

$$y = \pm e^C e^{x^3/3}$$

Se verifica fácilmente que la función $y = 0$ es también una solución de la ecuación diferencial dada. Así, se puede escribir la solución general en la forma

$$y = Ae^{x^3/3}$$

donde A es una constante arbitraria ($A = e^C$ o $A = -e^C$ o $A = 0$).

En la figura 3 se muestra un campo direccional para la ecuación diferencial del ejemplo 3. Compárelo con la figura 4, en la que se usa la ecuación $y = Ae^{x^3/3}$ para graficar soluciones para varios valores de A. Si emplea el campo direccional para bosquejar curvas solución con intersecciones en y: 5, 2, 1, -1 y -2, se asemejarán a las curvas de la figura 4.

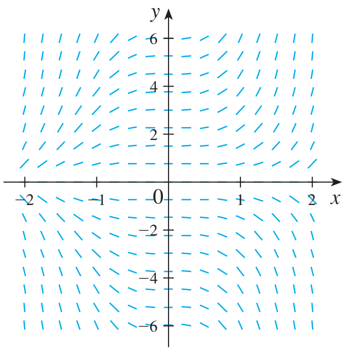


FIGURA 3

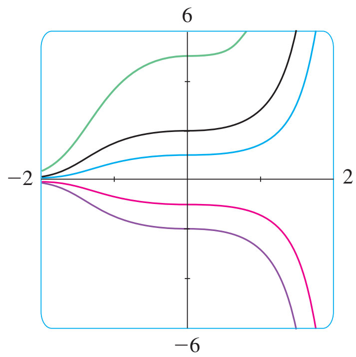


FIGURA 4

V EJEMPLO 4 En la sección 9.2 se modeló la corriente $I(t)$ en el circuito eléctrico mostrado en la figura 5 mediante la ecuación diferencial

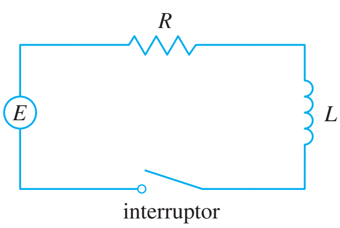


FIGURA 5

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E(t)$$

Encuentre una expresión para la corriente en un circuito donde la resistencia es 12 Ω, la inductancia es 4 H, una batería que da un voltaje constante de 60 V y el interruptor cierra el circuito en $t = 0$. ¿Cuál es el valor límite de la corriente?

SOLUCIÓN Con $L = 4$, $R = 12$ y $E(t) = 60$, la ecuación se convierte en

$$4\frac{dI}{dt} + 12I = 60 \qquad \text{o} \qquad \frac{dI}{dt} = 15 - 3I$$

y el problema con valor inicial es

$$\frac{dI}{dt} = 15 - 3I \qquad I(0) = 0$$

Esta ecuación es de variables separables y se resuelve como sigue:

$$\int \frac{dI}{15 - 3I} = \int dt \qquad (15 - 3I \neq 0)$$

$$-\tfrac{1}{3} \ln |15 - 3I| = t + C$$

$$|15 - 3I| = e^{-3(t+C)}$$

$$15 - 3I = \pm e^{-3C} e^{-3t} = Ae^{-3t}$$

$$I = 5 - \tfrac{1}{3}Ae^{-3t}$$

En la figura 6 se muestra cómo la solución del ejemplo 4 (la corriente) se aproxima a su valor límite. La comparación con la figura 11 de la sección 9.2 muestra que se pudo dibujar una curva solución bastante exacta a partir del campo direccional.

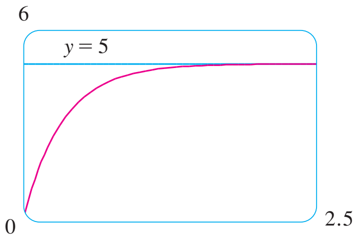


FIGURA 6

Puesto que $I(0) = 0$, se tiene $5 - \frac{1}{3}A = 0$, de modo que $A = 15$ y la solución es

$$I(t) = 5 - 5e^{-3t}$$

La corriente límite, en amperes, es

$$\lim_{t \to \infty} I(t) = \lim_{t \to \infty} (5 - 5e^{-3t}) = 5 - 5 \lim_{t \to \infty} e^{-3t} = 5 - 0 = 5$$

Trayectorias ortogonales

Una **trayectoria ortogonal** de una familia de curvas es una curva que corta ortogonalmente cada curva de la familia, es decir, en ángulos rectos (véase figura 7). Por ejemplo, cada miembro de la familia $y = mx$ de rectas que pasan por el origen es una trayectoria ortogonal de la familia $x^2 + y^2 = r^2$ de circunferencias concéntricas con centro en el origen (véase figura 8). Se dice que las dos familias son trayectorias ortogonales entre sí.

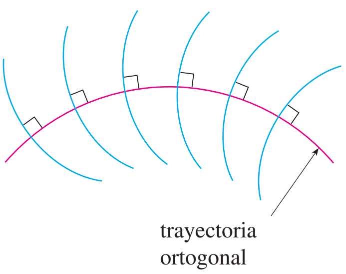


FIGURA 7

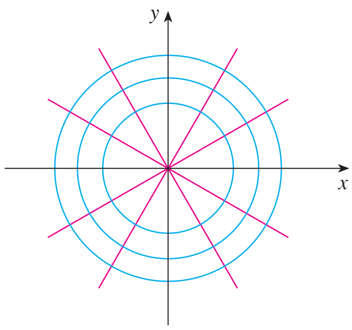


FIGURA 8

V EJEMPLO 5 Encuentre las trayectorias ortogonales de la familia de curvas $x = ky^2$, donde k es una constante arbitraria.

SOLUCIÓN Las curvas $x = ky^2$ forman una familia de parábolas cuyo eje de simetría es el eje x. El primer paso es hallar una sola ecuación diferencial que sea satisfactoria para todos los miembros de la familia. Si derivamos $x = ky^2$, obtenemos

$$1 = 2ky\frac{dy}{dx} \qquad \text{o} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2ky}$$

Esta ecuación diferencial depende de k, pero se necesita una ecuación que sea válida para los valores de k de manera simultánea. Para eliminar k se observa que, de la ecuación general de la parábola que se proporciona $x = ky^2$, se tiene $k = x/y^2$, por tanto, la ecuación diferencial se puede escribir como

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2ky} = \frac{1}{2\dfrac{x}{y^2}y}$$

o bien

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x}$$

Esto significa que la pendiente de la recta tangente en cualquier punto (x, y) sobre una de las parábolas es $y' = y/(2x)$. En una trayectoria ortogonal la pendiente de la recta tangente debe ser el recíproco negativo de esta pendiente. Por tanto, las trayectorias ortogonales deben satisfacer la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{y}$$

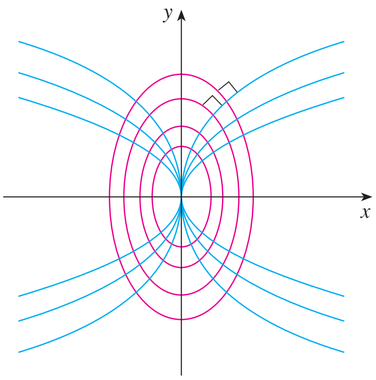


FIGURA 9

Esta ecuación diferencial es separable y se resuelve como sigue:

$$\int y\,dy = -\int 2x\,dx$$

$$\frac{y^2}{2} = -x^2 + C$$

$$\boxed{4} \qquad x^2 + \frac{y^2}{2} = C$$

donde C es una constante positiva arbitraria. Así, las trayectorias ortogonales son la familia de elipses dada por la ecuación 4 y bosquejada en la figura 9.

Las trayectorias ortogonales aparecen en varias ramas de la física. Por ejemplo, en un campo electrostático, las líneas de fuerza son ortogonales a las líneas de potencial constante. También, las líneas de corriente en aerodinámica son trayectorias ortogonales de las curvas equipotenciales de velocidad.

Problemas de mezclas

Un problema de mezclas característico involucra un tanque de capacidad fija lleno con una solución mezclada en todas sus partes de alguna sustancia, como una sal. Una solución de una determinada concentración entra al recipiente en una proporción fija, y la mezcla, totalmente agitada, sale con una proporción fija, que puede diferir de la proporción entrante. Si $y(t)$ denota la cantidad de sustancia en el recipiente en el tiempo t, entonces $y'(t)$ es la proporción a la que la sustancia está siendo añadida menos la proporción a la cual está siendo removida. La descripción matemática de esta situación suele llevar a una ecuación diferencial separable de primer orden. Se puede usar el mismo tipo de razonamiento para representar diversos fenómenos: reacciones químicas, descarga de contaminantes en un lago, inyección de un fármaco en el torrente sanguíneo.