Cálculo diferencial e integral I
Primer semestre 2022

Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Ejemplos de ejercicios posibles para la parte teórica del examen

1. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función.

(a) Explicar qué significa que f sea integrable.

(b) Dar un ejemplo de función en que f sea integrable y otro en que f no sea integrable (en cada caso, hay que justificar el porqué, lo que puede hacerse citando rsultados vistos en clase).

(c) Probar que si $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una primitiva de f, entonces $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

2. Sean $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ dos funciones integrables.

(a) Probar que $f(x) + g(x)$ también es integrable y $\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$.

(b) Si $g(x) = |f(x)|$, enuncie la propiedad que vincula la integral de g con el valor absoluto de la integral de f.

3. Considerar la ecuación diferencial

$$y'' + ay' + by = 0, a, b \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

(a) Explicar qué significa que $y = f(x)$ sea solución de (1).

(b) Si $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son soluciones de (1) y α_1, α_2 son números reales, ¿qué puede decirse sobre $y(x) = \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x)$? (cualquier cosa que afirme deberá ser demostrada).

(c) Explique qué tipo de soluciones va a tener la ecuación (1).

4. Considerar la ecuación diferencial

$$y' + a(x)y + b(x) = 0. \tag{2}$$

(a) Explicar cuál es la ecuación homogénea asociada a (2) y cómo se resuelve dicha ecuación.

(b) Explicar cómo se resuelve la ecuación (2).

5. Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dos series de términos positivos.

(a) Explique qué significa que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sea convergente.

(b) Demuestre que si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es convergente y $a_n \leq b_n$ para todo n, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

c) Sabiendo que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ es convergente, dé un ejemplo de aplicación del resultado del inciso (b).

6. Considere la serie geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$, donde $a \neq 0$ y $r \neq 0$.

(a) Explique cómo se obtiene la sucesión de sumas parciales $s_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$.

(b) Explique en qué casos la serie converge y en qué casos diverge (hay que justificar).

(c) Dé un ejemplo de serie geométrica convergente cuya suma sea 2.