

Mecánica Clásica 1

Prof. Cayetano Di Bartolo

Departamento de Física
Universidad Simón Bolívar

Esta guía está basada en los manuscritos que elaboré para los cursos de Mecánica que dicté en la Universidad Simón Bolívar. La guía todavía requiere de modificaciones y correcciones, y es mi esperanza que en algún momento se convierta en un libro. Si el lector desea hacerme alguna observación puede escribirme a la dirección dibarto@usb.ve

AGRADECIMIENTOS

El libro se está realizando con la magnífica colaboración de mi esposa Jacqueline Geille, quién contribuye en todos los aspectos de su elaboración. También agradezco al Profesor Lorenzo Leal, de la Universidad Central de Venezuela, que muy amablemente me facilitó sus notas para el curso de Mecánica.

Ultima actualización: Julio de 2004

Mecánica Lagrangeana

En este capítulo se introduce la formulación Lagrangeana de la mecánica y se estudian algunas de sus principales características.

4.1 Ecuaciones de Lagrange

Al final del capítulo anterior obtuvimos las ecuaciones de D'Alembert para un sistema de partículas con vínculos holónomos. Dichas ecuaciones no son más que las ecuaciones de Newton proyectadas sobre el espacio tangente a la variedad de configuración; una vez proyectadas las ecuaciones desaparecen las fuerzas reactivas. En esta sección reescribiremos las ecuaciones de D'Alembert en términos de las coordenadas generalizadas, las ecuaciones resultantes se conocen como ecuaciones de Lagrange.

Partamos de un sistema de N partículas con K vínculos holónomos, vector posición $\tilde{X} \in R^{3N}$ y $n = 3N - K$ coordenadas generalizadas $\{q_1, \dots, q_n\}$. Las funciones $\tilde{X} = \tilde{X}(q, t)$ resuelven los vínculos y definen el espacio de configuración Q . A continuación consideremos el primer término del lado izquierdo en las ecuaciones de D'Alembert (3.50)

$$\sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \ddot{\mathbf{r}}_{\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial q_b} \mathbf{r}_{\alpha} = \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \left\{ \frac{d}{dt} \left(\dot{\mathbf{r}}_{\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial q_b} \mathbf{r}_{\alpha} \right) - \dot{\mathbf{r}}_{\alpha} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial q_b} \mathbf{r}_{\alpha} \right) \right\}.$$

Debido a (3.24) y (3.25) esta ecuación se escribe como

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \ddot{\mathbf{r}}_{\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial q_b} \mathbf{r}_{\alpha} &= \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \left\{ \frac{d}{dt} \left(\dot{\mathbf{r}}_{\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial \dot{q}_b} \dot{\mathbf{r}}_{\alpha} \right) - \dot{\mathbf{r}}_{\alpha} \frac{\partial}{\partial q_b} \dot{\mathbf{r}}_{\alpha} \right\} \\ &= \sum_{\alpha=1}^N \frac{1}{2} m_{\alpha} \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_b} - \frac{\partial}{\partial q_b} \right\} (\dot{\mathbf{r}}_{\alpha} \cdot \dot{\mathbf{r}}_{\alpha}) = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_b} T - \frac{\partial}{\partial q_b} T. \end{aligned}$$

Al sustituir esta relación en (3.50) las ecuaciones de D'Alembert se convierten en

$$\Lambda_{q_b} T = \Theta_b \quad ; \quad b = 1, \dots, n \quad (4.1)$$

con

$$\Lambda_{q_b} \equiv \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_b} - \frac{\partial}{\partial q_b} \quad (4.2)$$

y

$$\Theta_b \equiv \tilde{F} \cdot \tilde{\tau}_b = \tilde{F} \cdot \frac{\partial}{\partial q_b} \tilde{X} = \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{F}_\alpha \cdot \frac{\partial}{\partial q_b} \mathbf{r}_\alpha. \quad (4.3)$$

Las ecuaciones (4.1) se conocen como ecuaciones de Lagrange. Sin embargo nosotros las llamaremos Lagrange tipo-T (por energía cinética) para diferenciarlas de otra versión de las mismas que escribiremos un poco más adelante. Las cantidades Θ_b son las proyecciones de la fuerza activa \tilde{F} sobre el espacio tangente y se conocen como las componentes de la fuerza generalizada. Debido a que las q no tienen necesariamente dimensiones de longitud, las Θ_b pueden no tener dimensiones de fuerza. En la mayoría de las ocasiones no existe ambigüedad respecto a cual variable estamos utilizando y simplemente escribiremos $\Lambda_b = \Lambda_{q_b}$.

Si las fuerzas activas del sistema provienen de una función potencial $V = V(\tilde{X}, t)$, i.e.

$$\mathbf{F}_\alpha = -\nabla_{(\alpha)} V, \quad (4.4)$$

podemos escribir que

$$\tilde{F} = -\tilde{\nabla} V \quad (4.5)$$

luego

$$\tilde{F} \cdot \frac{\partial}{\partial q_b} \tilde{X} = -\tilde{\nabla} V \cdot \frac{\partial}{\partial q_b} \tilde{X} = -\frac{\partial}{\partial q_b} V(q, t).$$

Aquí hemos definido $V(q, t) = V(\tilde{X}(q, t), t)$. De esta última ecuación y de la definición (4.3) se consigue que la fuerza generalizada se obtiene del potencial por medio de

$$\Theta_b = -\frac{\partial}{\partial q_b} V(q, t), \quad (4.6)$$

En este caso las ecuaciones (4.1) se convierten en

$$\Lambda_b L \equiv \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_b} - \frac{\partial L}{\partial q_b} = 0 \quad , \quad b \in \{1, \dots, n\}. \quad (4.7)$$

Donde se ha definido

$$L(q, \dot{q}, t) \equiv T - V. \quad (4.8)$$

A la función $L = L(q, \dot{q}, t)$ se le llama Lagrangeano del sistema y a las ecuaciones (4.7) ecuaciones de Euler-Lagrange. Sólo si el potencial no depende explícitamente del tiempo, $V = V(\tilde{X})$, el sistema es conservativo. Las ecuaciones de Lagrange también son válidas cuando $K = 0$ y en este caso las coordenadas generalizadas pueden ser las coordenadas cartesianas de las partículas que componen el sistema. Las ecuaciones de Lagrange son equivalentes a las de Newton, sin embargo veremos que este nuevo formalismo tiene algunas ventajas. Entre ellas están el que usualmente facilita la obtención de las ecuaciones de movimiento y el estudio de las consecuencias de las simetrías del sistema. A continuación veamos algunos ejemplos de aplicación de las ecuaciones de Lagrange.

Ejemplo 4.1 (Una partícula).

Consideremos una partícula de masa m sometida a una fuerza neta \mathbf{F} y sin vínculos. El espacio R^3 es el espacio de configuración y podemos utilizar como coordenadas generalizadas las coordenadas cartesianas de la partícula: $q_a = x_a$ con $a = 1, 2, 3$.

a) Obtengamos la ecuación de movimiento para la partícula a partir de las ecuaciones de Lagrange con energía cinética (4.1). La fuerza generalizada es igual a la fuerza sobre la partícula

$$\Theta_a = \sum_i F_i \frac{\partial x_i}{\partial q_a} = F_a,$$

y su energía cinética, $T = m \sum_a (\dot{q}_a)^2 / 2$ satisface

$$\frac{\partial T}{\partial q_a} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_a} = m\dot{q}_a.$$

En consecuencia (4.1) conduce a la ecuación de movimiento $m\ddot{q}_a = F_a$. Que por supuesto es la segunda ley de Newton aplicada a la partícula.

b) Supongamos ahora que la fuerza que se aplica a la partícula proviene de un potencial, $\mathbf{F} = -\nabla V(\mathbf{r})$. Utilicemos las ecuaciones de Lagrange para hallar el movimiento. El Lagrangeano del sistema $L = T - V$ satisface las relaciones

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_a} = m\dot{q}_a \quad \text{y} \quad \frac{\partial L}{\partial q_a} = -\frac{\partial V}{\partial q_a} = F_a.$$

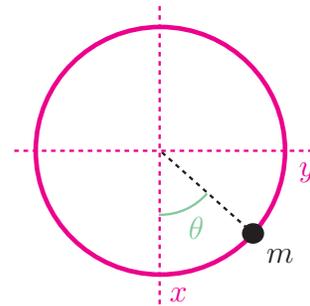
Luego

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} - \frac{\partial L}{\partial q_a} = 0 \quad \Rightarrow \quad m\ddot{q}_a = F_a.$$

Ejemplo 4.2 (Una cuenta en un aro rígido).

Consideremos una partícula de masa m obligada a moverse en un aro rígido, liso, vertical y de radio R . La partícula está en un campo gravitatorio constante con dirección \hat{u}_x , ver dibujo. Este problema es equivalente al de un péndulo de vara rígida y sin masa.

Utilizaremos coordenadas polares (r, θ) para identificar la posición de la partícula.



Este movimiento bidimensional tiene como única ligadura $r = R$. El sistema tiene un solo grado de libertad y usaremos como coordenada generalizada el ángulo θ . En términos de la coordenada generalizada las energías cinética y potencial del sistema toman la forma

$$T = \frac{1}{2}m|\dot{\mathbf{r}}|^2 = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 \quad \text{y} \quad V = -mgRx = -mgR\cos\theta.$$

El Lagrangeano del sistema es

$$L(q, \dot{q}) \equiv T - V = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + mgR\cos\theta$$

y satisface las relaciones

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgR\sin\theta \quad \text{y} \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mR^2\dot{\theta}.$$

Luego, la ecuación de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

conduce a una ecuación diferencial para la variable θ :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{R}\sin\theta = 0.$$

Nótese que en la derivación de las ecuaciones de movimiento no entró directamente en juego la fuerza reactiva debida al contacto con el aro. Por último podemos estudiar el movimiento para pequeños ángulos $\theta \approx \sin\theta$. En esta aproximación la ecuación diferencial anterior se convierte en

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{R}\theta \approx 0$$

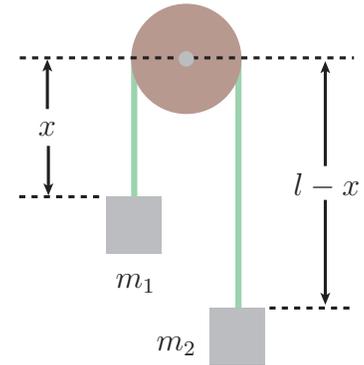
que corresponde a un oscilador armónico de frecuencia $\omega^2 = g/R$ y período $\tau = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{R/g}$.

Ejemplo 4.3 (Máquina de Atwood).

La figura muestra una polea sin roce y sin masa que se encuentra fija en un referencial inercial. Dos bloques cuelgan de los extremos de una cuerda que desliza por la polea. Deseamos hallar la aceleración de los bloques utilizando el formalismo Lagrangeano.

Llamaremos l a la longitud constante de la porción visible de la cuerda. Del dibujo es claro que variando x (entre 0 y l) los bloques ocupan todas las posiciones posibles compatibles con los vínculos; esto significa que el sistema tiene un único grado de libertad y podemos tomar la variable x como coordenada generalizada. Las coordenadas cartesianas de las partículas en función de la coordenada generalizada son

$$x_1 = x \quad \text{y} \quad x_2 = l - x.$$



Luego la energía cinética, la energía potencial y el Lagrangeano se escriben como

$$T = \frac{1}{2}(m_1\dot{x}_1^2 + m_2\dot{x}_2^2) = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)(\dot{x})^2,$$

$$V = -m_1gx_1 - m_2gx_2 = -(m_1 - m_2)gx - m_2gl,$$

$$L(x, \dot{x}) = T - V = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)(\dot{x})^2 + (m_1 - m_2)gx + m_2gl.$$

La ecuación de Lagrange conduce a

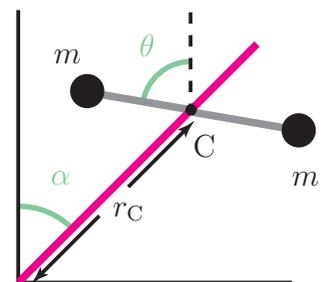
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} [(m_1 + m_2)\dot{x}] - (m_1 - m_2)g = 0$$

de donde se obtiene la aceleración que buscábamos

$$\ddot{x} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g.$$

Ejemplo 4.4.

La figura muestra dos partículas de masa m cada una que están unidas por una barra rígida sin masa, de longitud L y cuyo centro está restringido a moverse en una guía inclinada un ángulo α respecto a la vertical. La guía está fija en un referencial inercial y el movimiento de las partículas transcurre en el plano vertical que contiene a la guía. En este ejemplo usaremos el formalismo de Lagrange para obtener las ecuaciones de movimiento que rigen el sistema.



El centro C de la barra es el centro de masa del sistema formado por las partículas y la barra. Llamaremos r_C a la distancia de C al origen y θ al ángulo entre la barra y la vertical. Es claro que estas dos variables pueden usarse como las coordenadas generalizadas de este sistema con dos grados de libertad. Calculemos la energía cinética partiendo de la expresión (2.59) para la energía cinética de un sistema de dos partículas:

$$T = \frac{1}{2}M|\dot{\mathbf{r}}_{\text{cm}}|^2 + \frac{1}{2}\mu|\dot{\mathbf{r}}|^2.$$

La masa total del sistema es $M = 2m$, su masa reducida $\mu = m/2$ y la rapidez del centro de masa $|\dot{\mathbf{r}}_{\text{cm}}| = \dot{r}_c$. El vector posición relativa entre las dos partículas es \mathbf{r} . Dicho vector tiene módulo L y gira con velocidad angular $\dot{\theta}$ luego

$$|\dot{\mathbf{r}}|^2 = |\dot{\theta} \hat{u}_z \times \mathbf{r}|^2 = L^2 \dot{\theta}^2.$$

En consecuencia

$$T = m \dot{r}_c^2 + \frac{1}{4}m L^2 \dot{\theta}^2.$$

La energía potencial del sistema es

$$V = gm_1 y_1 + gm_2 y_2 = g(m_1 + m_2) y_{\text{cm}} = 2mg y_{\text{cm}} = 2mg r_c \cos\alpha,$$

donde hemos llamado Y al eje vertical. De las dos últimas expresiones obtenemos el Lagrangeano del sistema

$$L(r_c, \theta, \dot{r}_c, \dot{\theta}) = T - V = m \dot{r}_c^2 + \frac{1}{4}m L^2 \dot{\theta}^2 - 2mgr_c \cos\alpha.$$

Por último las ecuaciones de Lagrange conducen a las ecuaciones de evolución para las coordenadas generalizadas. Para la variable θ se obtiene

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}m L^2 \dot{\theta} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta} = \text{constante}$$

y para la variable r_c

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_c} - \frac{\partial L}{\partial r_c} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2m\ddot{r}_c + 2mg \cos\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{r}_c = -g \cos\alpha.$$

4.2 Lagrangeanos estandares.

En el formalismo Newtoniano un sistema mecánico se puede definir dando las expresiones de fuerzas que actúan sobre las partículas que lo componen; la segunda ley de Newton proporciona la evolución del sistema. En el formalismo Lagrangeano podemos definir un sistema mecánico dando la expresión de su Lagrangeano y las ecuaciones de Lagrange son

sus ecuaciones de movimiento. Aunque las ecuaciones de Lagrange se derivaron a partir de las ecuaciones de Newton podemos tomarlas como fundamentales. Podemos asumir que para cada sistema mecánico existe un lagrangeano $L(q, \dot{q}, t)$, no necesariamente dado por (4.8), tal que las ecuaciones de Lagrange proporcionan su evolución. En muchos casos las simetrías del sistema permiten determinar con mas facilidad condiciones sobre su Lagrangeano que sobre las fuerzas que actúan sobre él.

Las ecuaciones de movimiento de Lagrange, al igual que las de Newton, son de segundo orden. En principio ellas nos permiten calcular las aceleraciones a partir de las posiciones y velocidades. Para verlo escribamos las ecuaciones de Lagrange de manera más detallada como

$$\sum_a \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_a \partial \dot{q}_b} \ddot{q}_a = \frac{\partial L}{\partial q_b} - \sum_a \frac{\partial^2 L}{\partial q_a \partial \dot{q}_b} \dot{q}_a - \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{q}_b}. \quad (4.9)$$

Estas ecuaciones pueden pensarse como un sistema de ecuaciones lineales en las aceleraciones \ddot{q}_a . Obsérvese que las aceleraciones se pueden determinar de manera única en función de las coordenadas generalizadas q_b y velocidades \dot{q}_b si y solo si la matriz Hessiana, con elementos de matriz $\partial^2 L / \partial \dot{q}_a \partial \dot{q}_b$, es invertible; para que esto ocurra es necesario que el determinante de esta matriz (o Hessiano) no se anule, esto es,

$$\det \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_a \partial \dot{q}_b} \right) \neq 0. \quad (4.10)$$

Los Lagrangeanos que cumplen con la condición anterior se denominan Lagrangeanos estándares. A menos que se diga lo contrario supondremos que los Lagrangeanos con los cuales tratemos son estándares. La mayoría de los Lagrangeanos de interés que son definidos por $L = T - V$ cumplen la condición de Hessiano no nulo pero muchos Lagrangeanos de sistemas relativistas o de sistemas con infinitos grados de libertad (necesarios en teoría de campos) no satisfacen esta condición. Usualmente para el tratamiento de lagrangeanos no estándares se utiliza el formalismo de Dirac (P.A.M. Dirac, “Lectures in Quantum Field Theory”, Academic Press, New York, 1966).

Una descripción total de un sistema se consigue conociendo su Lagrangeano y las condiciones iniciales (como por ejemplo las coordenadas y velocidades generalizadas al instante $t = 0$). Al resolver las ecuaciones de Lagrange con las condiciones iniciales se obtienen las funciones $q_a(t)$.

4.3 Lagrangeanos equivalentes.

Hemos visto que la función Lagrangeana L determina las ecuaciones de movimiento sin ambigüedad pero el recíproco no es cierto. Dos Lagrangeanos con las mismas coordenadas generalizadas pueden originar ecuaciones de movimiento, distintas o no, que conduzcan a las mismas soluciones. En ese caso diremos que los Lagrangeanos son equivalentes. Un ejemplo trivial de Lagrangeanos equivalentes es el caso de los Lagrangeanos L y $L' = \text{cte } L$.

En esta sección estudiaremos un caso particular de Lagrangeanos equivalentes: aquéllos que conducen a las mismas ecuaciones de movimiento.

Dado un Lagrangeano $L(q, \dot{q}, t)$, demostremos que el Lagrangeano

$$L_e(q, \dot{q}, t) \equiv L(q, \dot{q}, t) + \frac{d}{dt}f(q, t) \quad (4.11)$$

produce las mismas ecuaciones de movimiento. Apliquemos el operador diferencial Λ_b a la función $\dot{f}(q, t)$.

$$\Lambda_b \dot{f}(q, t) = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_b} (\dot{f}) - \frac{\partial \dot{f}}{\partial q_b} = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_b} \left(\sum_a \frac{\partial f}{\partial q_a} \dot{q}_a + \frac{\partial f}{\partial t} \right) - \frac{\partial \dot{f}}{\partial q_b} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial q_b} \right) - \frac{\partial \dot{f}}{\partial q_b}$$

y usando la identidad (3.25) se obtiene

$$\Lambda_b \frac{d}{dt} f(q, t) = 0. \quad (4.12)$$

En consecuencia (4.11) conduce a

$$\Lambda_b L_e(q, \dot{q}, t) = \Lambda_b L(q, \dot{q}, t). \quad (4.13)$$

Esta última ecuación es válida para cualquier conjunto de funciones $\{q_1(t), \dots, q_n(t)\}$ lo cual significa que las ecuaciones de Lagrange de ambos Lagrangeanos son idénticas.

Comentario 4.1. Se puede demostrar que dos Lagrangeanos conducen a las mismas ecuaciones de movimiento, esto es satisfacen (4.13), si y solo si se cumple (4.11). Para la demostración ver por ejemplo José-Saletan (1998).

4.4 Aditividad del Lagrangeano

Dos sistemas mecánicos no interactuantes pueden tratarse como un único sistema. En esta sección estudiaremos cómo se relacionan los Lagrangeanos de los tres sistemas.

Sea A un sistema mecánico con coordenadas generalizadas $\{q_a/a = 1, \dots, n\}$, Lagrangeano $L_A(q, \dot{q}, t)$ y ecuaciones de movimiento

$$\Lambda_a L_A(q, \dot{q}, t) \equiv \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_a} L_A \right) - \frac{\partial}{\partial q_a} L_A = 0 \quad ; \quad a = 1, \dots, n. \quad (4.14)$$

Sea a su vez B un sistema mecánico con coordenadas generalizadas $\{q'_b/b = 1, \dots, n'\}$, Lagrangeano $L_B(q', \dot{q}', t)$ y ecuaciones de movimiento

$$\Lambda_b L_B(q', \dot{q}', t) \equiv \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}'_b} L_B \right) - \frac{\partial}{\partial q'_b} L_B = 0 \quad ; \quad b = 1, \dots, n'. \quad (4.15)$$

El sistema global $A \cup B$ está gobernado por los dos conjuntos de ecuaciones (4.14) y (4.15). Estos dos conjuntos de ecuaciones pueden obtenerse a partir de un único Lagrangeano. Si definimos

$$L_{A \cup B}(Q, \dot{Q}, t) = L_A(q, \dot{q}, t) + L_B(q', \dot{q}', t) \quad (4.16)$$

con

$$\{Q_1, \dots, Q_{n+n'}\} = \{q_1, \dots, q_n\} \cup \{q'_1, \dots, q'_{n'}\} \quad (4.17)$$

es inmediato que las ecuaciones de Lagrange

$$\Lambda_c L_{A \cup B}(Q, \dot{Q}, t) \equiv \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{Q}_c} L_{A \cup B} \right) - \frac{\partial}{\partial Q_c} L_{A \cup B} = 0 \quad ; \quad c = 1, \dots, n + n'. \quad (4.18)$$

son idénticas a las ecuaciones (4.14) y (4.15). Esto significa que $L_{A \cup B}$ es el Lagrangeano del sistema completo. Similarmente si partimos de un sistema cuyo Lagrangeano se pueda descomponer como en (4.16) entonces se puede tratar como dos sub-sistemas A y B independientes.

Si estamos tratando con dos sistemas A y B que están interactuando entonces el Lagrangeano del sistema global puede escribirse como

$$L(Q, \dot{Q}, t) = L_A(q, \dot{q}, t) + L_B(q', \dot{q}', t) + L_I(Q, \dot{Q}, t) \quad (4.19)$$

donde L_I es un término de interacción. Como un ejemplo si consideramos un sistema de dos partículas que interactúan por medio de un potencial $V(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$ entonces el término de interacción en el Lagrangeano del sistema es $L_I = -V(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$.

4.5 Constantes de movimiento.

Llamaremos constantes de movimiento (o integrales de movimiento) de un sistema mecánico a funciones $G(q, \dot{q}, t)$ que toman un valor constante en el tiempo cuando se evalúan en cada una de las soluciones de las ecuaciones de movimiento del sistema. Pudiendo variar el valor de la constante de una solución a otra. El conocimiento de constantes de movimiento para un sistema físico arroja luz sobre su evolución y simplifica el problema de resolver sus ecuaciones de movimiento. A continuación estudiaremos cuantas constantes de movimiento independientes posee un sistema mecánico.

Hemos visto que las ecuaciones de Euler-Lagrange son ecuaciones diferenciales de segundo orden en las coordenadas generalizadas. La solución general de estas ecuaciones,

$$\begin{aligned} q_\alpha &= q_\alpha(C_1, \dots, C_{2n}, t) \\ \dot{q}_\alpha &= \dot{q}_\alpha(C_1, \dots, C_{2n}, t), \end{aligned} \quad (4.20)$$

depende de $2n$ constantes de integración (C_1, \dots, C_{2n}) con n el número de grados de libertad, ellas pueden ser los valores iniciales de las coordenadas y velocidades generalizadas u otras variables que sean constantes para el sistema (como su energía o alguna componente del momentum angular). Al invertir las ecuaciones anteriores se obtienen $2n$ constantes de movimiento independientes

$$C_i = C_i(q, \dot{q}, t) \quad , \quad i = 1, \dots, 2n. \quad (4.21)$$

Es claro que esta inversión puede hacerse siempre, ya que de no ser así significaría que existen ligaduras entre las variables (q, \dot{q}, t) y las coordenadas generalizadas no podrían variarse independientemente unas de otras. Decimos que estas constantes de integración son independientes unas de otras en el sentido de que para cada solución de las ecuaciones de Lagrange hay un único valor para cada constante y viceversa, ese es el punto de partida al escribir la solución general (4.20). Que estas funciones sean independientes significa que no se puede obtener una de ellas en función de las otras.

Ahora probaremos que el número máximo de integrales de movimiento es $2n$. Sea $G(q, \dot{q}, t)$ una integral de movimiento, al substituir en ella la solución general (4.20) se obtiene la función

$$g(C, t) \equiv G(q(C, t), \dot{q}(C, t), t)$$

y podemos escribir que $G(q, \dot{q}, t) = g(C(q, t), t)$. Por ser $g(C, t)$ una constante satisface

$$0 = \dot{g}(C, t) = \frac{\partial g}{\partial t},$$

luego $G(q, \dot{q}, t) = g(C(q, t))$. Como G se puede escribir en función de las constantes de movimiento C_i significa que no hay más integrales de movimiento independientes. Conocer $2n$ constantes de movimiento de un sistema mecánico es equivalente a resolver sus ecuaciones de movimiento ya que éstas se pueden invertir para obtener la solución general (4.20).

En las próximas dos secciones veremos casos particulares para los cuales algunas de las ecuaciones de Euler-Lagrange se integra trivialmente una vez para conducir a una constante de movimiento.

4.6 Momentum generalizado y coordenadas cíclicas.

Se define el momentum generalizado conjugado a la coordenada q_a por

$$p_a(q, \dot{q}, t) \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a}. \quad (4.22)$$

En términos de los momentos generalizados las ecuaciones de Euler-Lagrange toman la forma

$$\frac{dp_a}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_a}. \quad (4.23)$$

Si en el Lagrangeano no aparece la coordenada canónica q_a , esto es, si

$$\frac{\partial L}{\partial q_a} = 0 \quad (4.24)$$

decimos que q_a es una coordenada cíclica o ignorable. Entonces debido a (4.23) se cumple que el momento conjugado a una coordenada generalizada es una constante de movimiento si y solo si la coordenada es cíclica.

El momentum generalizado no necesariamente coincide con el momentum lineal y en muchas ocasiones sus dimensiones (o unidades) son muy distintas a masa por velocidad. A continuación veamos un ejemplo.

Ejemplo 4.5 (Partícula de masa m sometida a un potencial $V(\mathbf{r})$).

a) Si utilizamos las coordenadas cartesianas (x_1, x_2, x_3) como generalizadas entonces el Lagrangeano del sistema y los momentos generalizados son

$$L(x, \dot{x}, t) = \frac{1}{2}m \sum_i (\dot{x}_i)^2 - V(x_1, x_2, x_3)$$

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} = m\dot{x}_j.$$

Nótese que en este caso p_j es la componente j del momento lineal de la partícula. Este momento será una constante de movimiento si y solo si el potencial no depende de la coordenada x_j .

b) Tomemos ahora las coordenadas cilíndricas (ρ, φ, z) como generalizadas. De la expresión (1.42)) para la velocidad de la partícula en coordenadas cilíndricas obtenemos que su energía cinética es $T = m[\dot{z}^2 + \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2]/2$; luego el Lagrangeano y el momento conjugado a φ son

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}m[\dot{z}^2 + \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2] - V(\rho, \varphi, z) \\ p_\varphi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m\rho^2\dot{\varphi} = L_z. \end{aligned}$$

En este caso p_φ es igual a la componente z del momentum angular y se conserva si el potencial no depende del ángulo φ .

Los momentos generalizados de un sistema mecánico dependen del Lagrangeano que se esté usando para describirlo. En efecto, si cambiamos a un Lagrangeano equivalente como en (4.11),

$$L_e(q, \dot{q}, t) \equiv L(q, \dot{q}, t) + \frac{d}{dt}f(q, t),$$

se cumple que

$$p_a^e = \frac{\partial L_e}{\partial \dot{q}_a} = p_a + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_a} \left(\frac{df}{dt} \right)$$

y usando (3.24) (la ley de cancelación de los puntos) se obtiene

$$p_a^e = p_a + \frac{\partial f}{\partial q_a}. \quad (4.25)$$

4.7 La función energía.

A continuación estudiaremos otra variable que en un ancho rango de sistemas es una constante de movimiento, se trata de la función energía o integral Jacobiana del movimiento de un sistema mecánico que se define como

$$h(q, \dot{q}, t) \equiv \sum_a \dot{q}_a \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} - L = \sum_a \dot{q}_a p_a - L. \quad (4.26)$$

Para estudiar bajo qué condiciones es una constante de movimiento calculemos su derivada temporal.

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= \sum_a \frac{d}{dt} \left(\dot{q}_a \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \right) - \frac{dL}{dt} \\ &= \sum_a \left[\ddot{q}_a \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} + \dot{q}_a \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \right] - \left[\sum_a \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \ddot{q}_a + \frac{\partial L}{\partial q_a} \dot{q}_a \right) + \frac{\partial L}{\partial t} \right] \\ &= \sum_a \dot{q}_a \left[\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} - \frac{\partial L}{\partial q_a} \right] - \frac{\partial L}{\partial t}, \end{aligned}$$

luego

$$\frac{dh}{dt} = \sum_a \dot{q}_a \Lambda_a L - \frac{\partial L}{\partial t}. \quad (4.27)$$

De la ecuación anterior se obtiene que sobre las ecuaciones de movimiento se cumple

$$\frac{dh}{dt} = - \frac{\partial L}{\partial t}. \quad (4.28)$$

En consecuencia, la función h es una constante de movimiento si y solo si el Lagrangeano no depende explícitamente del tiempo.

Ahora veremos que bajo ciertas condiciones la función energía h es igual a la energía del sistema $E = T + V$. Consideremos un sistema mecánico cuya energía cinética, energía potencial y Lagrangeano sean de la forma

$$\begin{aligned} T &= T_2 + T_1 + T_0 \\ V &= V_1 + V_0 \\ L &= T - V = T_2 + T_1 + T_0 - V_1 - V_0 \end{aligned} \quad (4.29)$$

donde los subíndices indican el grado de homogeneidad de las funciones en el conjunto de variables \dot{q} . Para la definición de funciones homogéneas ver el comentario 3.1 en la página 44, el comentario que sigue enuncia una propiedad de tales funciones que usaremos pronto.

Comentario 4.2 (Teorema de Euler para funciones homogéneas). Si $F(z_1, \dots, z_n)$ es una función homogénea de grado λ en las variables z entonces

$$\tilde{z} \cdot \tilde{\nabla} F \equiv \sum_{I=1}^n z_I \frac{\partial F}{\partial z_I} = \lambda F. \quad (4.30)$$

Usando el teorema de Euler para funciones homogéneas se encuentra que el sistema (4.29) cumple con

$$\sum_a \dot{q}_a \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} = \sum_a \dot{q}_a \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_a} - \sum_a \dot{q}_a \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_a} = 2T_2 + T_1 - V_1.$$

Luego su función energía es

$$h = \sum_a \dot{q}_a \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} - L = T_2 - T_0 + V_0 \quad (4.31)$$

y en general no coincide con la energía $E = T + V$. Sin embargo se cumple que

$$\text{si } T = T_2 \text{ y } V = V(q) \text{ entonces } h = E = T + V. \quad (4.32)$$

Esta condición la cumplen muchos sistemas ya que la mayoría de los sistemas tienen potenciales que no dependen de las velocidades y la condición $T = T_2$ la satisfacen todos los sistemas para quienes la ley de transformación de coordenadas generalizadas a cartesianas no dependa explícitamente del tiempo, $\tilde{X} = \tilde{X}(q)$, ver ecuaciones (3.16 a 3.21).

La función energía de un sistema mecánico depende del Lagrangeano que se esté usando para describirlo. En efecto, si cambiamos a un Lagrangeano equivalente como en (4.11),

$$L_e(q, \dot{q}, t) \equiv L(q, \dot{q}, t) + \frac{d}{dt} f(q, t),$$

el cambio en la función energía es

$$h^e(q, \dot{q}, t) = \sum_a \dot{q}_a p_a^e - L_e = h + \sum_a \dot{q}_a \frac{\partial f}{\partial q_a} - \frac{d}{dt} f(q, t)$$

luego

$$h_e = h - \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (4.33)$$

Comentario 4.3 (Aditividad de la función energía). La función energía hereda la aditividad del Lagrangeano. Si tenemos

$$L_{AUB}(Q, \dot{Q}, t) = L_A(q, \dot{q}, t) + L_B(q', \dot{q}', t)$$

entonces es inmediato que

$$h_{AUB} = h_A + h_B. \quad (4.34)$$

4.8 Potenciales dependientes de la velocidad. Partícula cargada en un campo electromagnético.

En esta sección mostraremos cómo se obtiene el Lagrangeano para algunos sistemas cuyas fuerzas dependen de las velocidades. Luego aplicaremos el formalismo para escribir el Lagrangeano de una partícula cargada, no relativista, en un campo electromagnético.

Consideremos un sistema mecánico en el cual la fuerza generalizada se obtiene de una función potencial $V = V(q, \dot{q}, t)$ como

$$\Theta_b = \Lambda_b V(q, \dot{q}, t) \equiv -\frac{\partial V}{\partial q_b} + \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_b}. \quad (4.35)$$

De las ecuaciones de Lagrange tipo-T, $\Lambda_b T = \Theta_b$, es inmediato que las ecuaciones de Euler-Lagrange se pueden escribir en la forma usual

$$\begin{aligned} L &\equiv T - V \\ \Lambda_b L &= 0. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Este potencial no es único, si el potencial se cambia de acuerdo a

$$V \rightarrow V' = V + \frac{d}{dt} f(q, t) \quad (4.37)$$

entonces debido a (4.12) la fuerza generalizada no se altera y las ecuaciones de movimiento tampoco.

Un ejemplo muy importante que cae dentro de esta categoría de potenciales es la fuerza electromagnética sobre una partícula cargada. Para demostrarlo partamos de las ecuaciones de Maxwell en el vacío,

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (4.38a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (4.38b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (4.38c)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (4.38d)$$

con $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ la velocidad de la luz. La ecuación (4.38a) se resuelve diciendo que \mathbf{B} es un rotor

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (4.39)$$

donde \mathbf{A} es llamado potencial vector. Al introducir esta ecuación en (4.38b) se obtiene

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0,$$

ecuación que se resuelve diciendo que la cantidad dentro del paréntesis es un gradiente,

$$\left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = -\nabla \phi.$$

De esta última ecuación se obtiene el campo eléctrico

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (4.40)$$

A la función ϕ se le llama potencial escalar. Las otras ecuaciones de Maxwell sirven para determinar el potencial electromagnético (ϕ, \mathbf{A}) en función de las fuentes (ρ, \mathbf{J}).

Una partícula de carga q y posición $\mathbf{r}(t)$ en presencia de un campo electromagnético experimenta una fuerza

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}) = q \left[-\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \dot{\mathbf{r}} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \right], \quad (4.41)$$

donde todos los campos están evaluados en el punto que ocupa la partícula. Esta fuerza se conoce como fuerza de Lorentz y a continuación hallaremos una función energía potencial de donde derivarla. Para comenzar escribamos en componentes de una base cartesiana el último sumando del lado derecho en (4.41)

$$\begin{aligned} [\dot{\mathbf{r}} \times (\nabla \times \mathbf{A})]_i &= \sum_{j,k,n,l} \varepsilon_{ijk} \dot{x}_j \varepsilon_{knl} \frac{\partial A_l}{\partial x_n} = \sum_{j,n,l} (\delta_{in} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jn}) \dot{x}_j \frac{\partial A_l}{\partial x_n} \\ &= \sum_j (\dot{x}_j \frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \dot{x}_j \frac{\partial A_i}{\partial x_j}) = \dot{\mathbf{r}} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x_i} - (\dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla) A_i. \end{aligned}$$

Luego la fuerza de Lorentz en componentes es

$$\begin{aligned} F_i &= q \left[-\frac{\partial \phi}{\partial x_i} + \dot{\mathbf{r}} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial t} - (\dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla) A_i \right] \\ &= q \left[-\frac{\partial}{\partial x_i} (\phi - \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}) + \frac{d}{dt} (-A_i) \right] \\ &= q \left[-\frac{\partial}{\partial x_i} (\phi - \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}) + \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} (-\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}) \right]. \end{aligned}$$

Finalmente, de la última expresión, obtenemos que

$$F_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{x}_i} = \Lambda_i V, \quad (4.42)$$

donde la energía potencial (también llamada energía de interacción) se define por

$$V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) \equiv q\phi(\mathbf{r}, t) - q\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t). \quad (4.43)$$

Tomaremos las coordenadas cartesianas como generalizadas. En este caso la fuerza de Lorentz es la fuerza generalizada y concuerda con (4.35) y esto implica que el Lagrangeano de la partícula es

$$L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = \frac{1}{2}m|\dot{\mathbf{r}}|^2 - q\phi(\mathbf{r}, t) + q\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}, t). \quad (4.44)$$

Este Lagrangeano proporciona las ecuaciones de movimiento de la partícula cargada pero no proporciona las ecuaciones de Maxwell; decimos entonces que el campo electromagnético es un campo externo. Se pueden agregar términos a este Lagrangeano que den cuenta de las ecuaciones de Maxwell pero esto no podemos hacerlo aquí ya que el procedimiento requiere extender el formalismo de Lagrange a sistemas con infinitos grados de libertad.

El momento conjugado a x_i es

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i + qA_i \quad (4.45)$$

y es igual a la cantidad de movimiento de la partícula más un término adicional. Por su lado la función energía es distinta a $T + V$, en efecto

$$h \equiv \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{p} - L = \frac{1}{2}m|\dot{\mathbf{r}}|^2 + q\phi. \quad (4.46)$$

Para que h sea una constante de movimiento el Lagrangeano no debe depender explícitamente del tiempo y esto implica que ϕ y \mathbf{A} tampoco deben depender explícitamente del tiempo.

Por último definiremos qué es un cambio de calibre en la teoría electromagnética y estudiaremos cómo afectan estos cambios al formalismo desarrollado. El campo electromagnético (\mathbf{E}, \mathbf{B}) es invariante (no cambia) frente a cambios de potencial de la forma

$$\begin{cases} \mathbf{A} & \rightarrow & \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\Lambda \\ \phi & \rightarrow & \phi' = \phi - \frac{\partial}{\partial t}\Lambda. \end{cases} \quad (4.47)$$

A esta transformación se le denomina “transformación de calibre”. Clásicamente se piensa que toda la información física está contenida en el campo electromagnético (\mathbf{E}, \mathbf{B}) . Un cambio de calibre no cambia los campos y por lo tanto no cambia el problema físico; el potencial tiene información espúrea o no relevante.

Al realizar una transformación de calibre el Lagrangeano (4.44) cambia de acuerdo a

$$L \rightarrow L' = \frac{1}{2}m|\dot{\mathbf{r}}|^2 - q\phi' + q\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A}' = L + q\frac{\partial}{\partial t}\Lambda + q\dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla\Lambda = L + \frac{d}{dt}(q\Lambda),$$

esto es,

$$L \rightarrow L' = L + \frac{d}{dt}f \quad \text{con} \quad f(\mathbf{r}, t) = q\Lambda(\mathbf{r}, t). \quad (4.48)$$

Frente a un cambio de calibre el Lagrangeano transforma a un Lagrangeano equivalente de la forma (4.11). Esto significa que las ecuaciones de movimiento para la partícula cargada no cambian y decimos entonces que las ecuaciones de Lagrange son invariantes de calibre. De acuerdo a (4.25) el momento generalizado cambia como

$$\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}' = \mathbf{p} + \nabla(q\Lambda). \quad (4.49)$$

Comentario 4.4 (Calibre de Landau). Para el caso $\mathbf{E} = 0$ y \mathbf{B} constante se puede tomar el calibre de Landau: $\phi = 0$ y $\mathbf{A} = \frac{1}{2}\mathbf{B} \times \mathbf{r}$. Con esta elección de potencial es inmediato que $\mathbf{E} = 0$ y de la identidad $\nabla \times (\mathbf{c} \times \mathbf{r}) = 2\mathbf{c} - \mathbf{r}(\nabla \cdot \mathbf{c})$ se obtiene $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$.

4.9 Lagrangeano para el problema de dos cuerpos.

Consideremos un sistema aislado formado por dos partículas de masas $\{m_1, m_2\}$ y posiciones $\{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2\}$ respecto a un sistema de referencia inercial S . Supondremos que la fuerza entre las dos partículas es central y hallaremos el Lagrangeano del sistema.

La energía cinética del sistema viene dada por (2.59),

$$T = \frac{1}{2}M|\dot{\mathbf{r}}_{\text{cm}}|^2 + \frac{1}{2}\mu|\dot{\mathbf{r}}|^2. \quad (4.50)$$

En la expresión anterior $M = m_1 + m_2$ es la masa total, $\mu = m_1m_2/(m_1 + m_2)$ es la masa reducida, \mathbf{r}_{cm} es la posición del centro de masa y $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ es la posición relativa de la primera partícula respecto a la segunda. Supondremos que la fuerza entre las partículas proviene de una energía potencial $V(r)$ (con $r = |\mathbf{r}|$) de acuerdo a

$$\mathbf{F}_{1,2} = -\nabla V(r). \quad (4.51)$$

En la expresión anterior el gradiente se toma respecto a la variable \mathbf{r} . Todo esto conduce a que el Lagrangeano del sistema sea

$$L_{\text{Sistema}} = \frac{1}{2}M|\dot{\mathbf{r}}_{\text{cm}}|^2 + \frac{1}{2}\mu|\dot{\mathbf{r}}|^2 - V(r). \quad (4.52)$$

El Lagrangeano del sistema se puede escribir como la suma de dos Lagrangeanos independientes:

$$L_{\text{Sistema}} = L_{\text{cm}} + L \quad (4.53a)$$

$$L_{\text{CM}}(\mathbf{r}_{\text{cm}}, \dot{\mathbf{r}}_{\text{cm}}) = \frac{1}{2}M|\dot{\mathbf{r}}_{\text{cm}}|^2 \quad (4.53b)$$

$$L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = \frac{1}{2}\mu|\dot{\mathbf{r}}|^2 - V(r). \quad (4.53c)$$

El Lagrangeano L_{cm} proporciona las ecuaciones de movimiento del centro de masa. Las variables en \mathbf{r}_{cm} son cíclicas y esto conduce a que la velocidad del centro de masa sea constante. Note que este Lagrangeano es nulo si el referencial inercial tiene origen en el centro de masa del sistema.

El Lagrangeano (4.53c) proporciona las ecuaciones de evolución del vector \mathbf{r} válidas en cualquier referencial inercial. Estas ecuaciones son iguales a las ecuaciones de evolución del vector posición de la partícula #1 que determina un observador no inercial con origen sobre la partícula #2 y con velocidad angular nula respecto a los referenciales inerciales.