

# MECÁNICA LAGRANGIANA y HAMILTONIANA

E. Velasco

*Universidad Autónoma de Madrid*

<b>Contents</b>	
<b>I. Introducción</b>	<b>3</b>
<b>II. Cálculo variacional</b>	<b>3</b>
<b>III. Principio de Hamilton</b>	<b>14</b>
<b>IV. Coordenadas generalizadas</b>	<b>16</b>
<b>V. Principio de Hamilton general y ecuaciones de Lagrange</b>	<b>17</b>
<b>VI. Ejemplos</b>	<b>19</b>
<b>VII. Ligaduras</b>	<b>25</b>
<b>VIII. Teorema sobre la energía cinética</b>	<b>30</b>
<b>IX. Leyes de conservación y simetrías</b>	<b>32</b>
<b>X. Ecuaciones de Lagrange desde la mecánica newtoniana</b>	<b>34</b>
<b>XI. Mecánica hamiltoniana</b>	<b>38</b>
<b>A. Análisis del péndulo simple acelerado mediante mecánica newtoniana</b>	<b>45</b>
<b>References</b>	<b>45</b>

## I. INTRODUCCIÓN

La Mecánica de Lagrange o lagrangiana es una reformulación de la mecánica newtoniana, más flexible y a menudo más útil para resolver problemas. Se basa en un principio de mínimo, pero se puede obtener de la mecánica newtoniana, ya que ambas son equivalentes. La mecánica lagrangiana es importante porque permite de manera natural ampliar la mecánica para incluir campos (por ejemplo, la electrodinámica, que incluye partículas cargadas junto con campos electromagnéticos). La herramienta matemática de la mecánica de Lagrange es el cálculo variacional, y por ello vamos a empezar con una introducción a esta técnica.

## II. CÁLCULO VARIACIONAL

El cálculo variacional se basa en el concepto de *funcional*, de la misma manera que el cálculo tradicional se aplica sobre funciones. Una función de una variable,  $y = f(x)$ , es un procedimiento para obtener un número,  $y$ , a partir de otro,  $x$ . Un funcional es una función de funciones:  $z = F[f]$  es un procedimiento para obtener un número,  $z$ , a partir de toda una función  $f(x)$ . A cada función le corresponde un número. Un ejemplo de funcional es:

$$z = F[f] = \int_{x_1}^{x_2} dx [f(x)]^2. \quad (1)$$

Para cada función  $f(x)$ , podemos calcular la integral definida de su cuadrado en el intervalo  $[x_1, x_2]$ , obteniendo un número  $y$ . Normalmente, en un problema dado se restringen las funciones posibles a aquellas que pasan por dos puntos en el plano  $xy$ , es decir, se imponen las *condiciones de contorno*  $f(x_1) = y_1$ ,  $f(x_2) = y_2$ .

El problema fundamental del cálculo variacional es el siguiente. Dado el funcional

$$F[f] = \int_{x_1}^{x_2} dx g(f(x), f'(x); x), \quad (2)$$

se trata de obtener la función  $f(x)$  que hace que el funcional  $F$  adquiera un valor extremo (mínimo o máximo); es decir, si se trata de un mínimo, por ejemplo, hay que obtener, de entre todas las infinitas *funciones posibles*, aquella que hace que  $F$  tenga un valor mínimo. Por funciones posibles entendemos aquellas que pasan por los puntos  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$  del plano (Fig. 1):

$$f(x_1) = y_1, \quad f(x_2) = y_2. \quad (3)$$

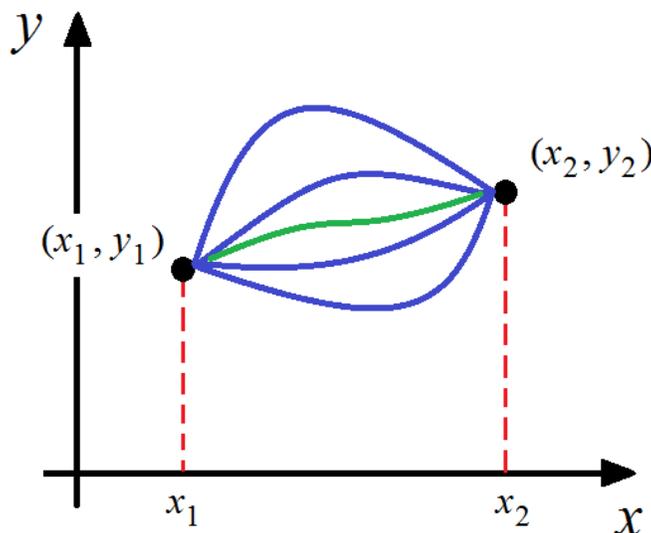


FIG. 1: Posibles curvas que unen los puntos  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$ .

En la Fig. 1 se representan varias funciones  $f(x)$  posibles; sólo una de ellas (pintada en color verde) daría un valor extremo.

Como ejemplo, consideremos el problema de calcular la curva que pasa por dos puntos 1 y 2 del plano  $xy$  con longitud mínima. Todos sabemos que tal curva es una línea recta pero, ¿sabemos demostrarlo?. Para ello, hemos de construir un funcional que nos dé la longitud de una curva dada por la función  $y = f(x)$ . Tal funcional es:

$$F[f] = \int_1^2 dl. \quad (4)$$

El elemento diferencial es  $dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{1 + (dy/dx)^2} = dx\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ . Por tanto,

$$F[f] = \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{1 + [f'(x)]^2}, \quad \begin{cases} f(x_1) = y_1 \\ f(x_2) = y_2 \end{cases} \quad (5)$$

La función  $f(x)$  que hace que este funcional sea mínimo es

$$f(x) = y_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}(y_2 - y_1), \quad (6)$$

pero aún no sabemos demostrarlo.

Vamos a obtener una ecuación diferencial cuya solución nos da la solución al problema fundamental del cálculo variacional. Primero, introducimos el símbolo  $\delta$  para denotar una variación de la función  $f(x)$

en todos los puntos del intervalo  $[x_1, x_2]$ , es decir,  $\delta f(x)$ , pero respetando las condiciones de contorno (3), de modo que  $\delta f(x_1) = \delta f(x_2) = 0$ . Entonces, la variación en el funcional,  $\delta F$ , al variar la función,  $\delta f$ , es:

$$\delta F = \delta \int_{x_1}^{x_2} dx g(f(x), f'(x); x) = \int_{x_1}^{x_2} dx \delta g(f(x), f'(x); x) = \int_{x_1}^{x_2} dx \left( \frac{\partial g}{\partial f} \delta f + \frac{\partial g}{\partial f'} \delta f' \right). \quad (7)$$

Ahora tenemos  $\delta f' = \delta(df/dx) = (d/dx)\delta f$ . Integrando por partes la segunda integral:

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \frac{\partial g}{\partial f'} \delta f' = \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{\partial g}{\partial f'} \frac{d}{dx} \delta f = \left. \frac{\partial g}{\partial f'} \delta f(x) \right|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial g}{\partial f'} \right) \delta f. \quad (8)$$

Aplicando la condición de variación nula en los extremos, el primer término desaparece. Entonces:

$$\delta F = \int_{x_1}^{x_2} dx \left[ \frac{\partial g}{\partial f} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial g}{\partial f'} \right) \right] \delta f. \quad (9)$$

Puesto que la variación  $\delta f(x)$  es arbitraria, la única manera de que  $\delta F = 0$  es que el término entre corchetes sea nulo:

$$\frac{\partial g}{\partial f} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial g}{\partial f'} \right) = 0. \quad (10)$$

Esta es la llamada *ecuación de Euler* (que no es más que una ecuación diferencial de segundo orden en la función  $f(x)$ ), a la que hay que suplementar las condiciones de contorno (3). La ecuación de Euler es equivalente a la condición de extremo del funcional,  $\delta F = 0$ : una implica la otra.

La condición  $\delta F = 0$  se aplica a la búsqueda de un extremo. El que este corresponda a un mínimo o a un máximo no queda resuelto. Para ello, hemos de buscar la segunda variación del funcional,  $\delta^2 F$ . Si esta es positiva, se tratará de un mínimo; si es negativa, de un máximo. La ecuación para  $\delta^2 F$ , en la cual habría que sustituir la solución a la ecuación de Euler para ver el signo, se puede obtener, pero no lo vamos a hacer aquí. A menudo la lógica indica si la solución encontrada corresponde a un mínimo o a un máximo.

El proceso anterior es análogo a lo que ocurre en cálculo de funciones de una variable. Supongamos una función  $f(x)$ . Queremos buscar los valores de  $x$  para los cuales la función es extrema (mínima o máxima). Para ello hemos de imponer la condición  $df = 0$ . La variación de la función,  $df$ , cuando hacemos una variación arbitraria de la variable independiente,  $dx$ , es

$$df = \frac{df}{dx} dx = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{df}{dx} = 0, \quad (11)$$

ya que  $dx \neq 0$ . Estas dos ecuaciones del cálculo en funciones son análogas a las ecuaciones (9) y (10), respectivamente, en cálculo variacional (o cálculo en funcionales). De la misma manera, para ver la

naturaleza del extremo es necesario estudiar el signo de la derivada segunda en el extremo, ya que  $d^2 f = \frac{1}{2} \frac{d^2 f}{dx^2} dx^2$ .

Aplicando la ecuación de Euler al problema de la distancia mínima entre dos puntos, tenemos:

$$g(f, f'; x) = \sqrt{1 + f'^2} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial g}{\partial f} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial g}{\partial f'} \right) = 0 - \frac{d}{dx} \left( \frac{f'}{\sqrt{1 + f'^2}} \right) = 0, \quad (12)$$

de donde

$$\frac{f'}{\sqrt{1 + f'^2}} = c \quad \rightarrow \quad f' = \frac{c}{\sqrt{1 - c^2}} \equiv a, \quad (13)$$

donde  $c$  y por tanto  $a$  son constantes. Integrando:

$$f(x) = \int dx a = ax + b. \quad (14)$$

Ajustando las constantes  $a$  y  $b$  a las condiciones de contorno obtenemos la ecuación (6).

Como aplicación adicional, consideremos el *problema de la braquistocrona* (en griego, ‘el intervalo de tiempo más corto’), formulado en el siglo XVII y resuelto por los hermanos Bernoulli. Fue el primer problema resuelto por cálculo variacional y el que dió pie al campo. Dados dos puntos, 1 y 2, se trata de obtener la curva de la superficie por la que un cuerpo cae rodando (sin rozamiento) invirtiendo el menor tiempo (Fig. 2).

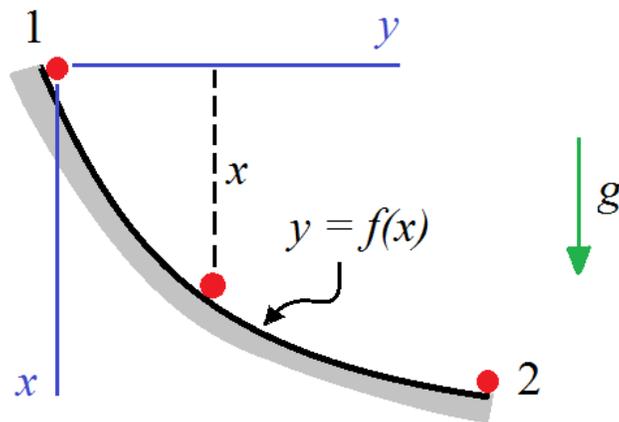


FIG. 2: Problema de la braquistocrona. Una masa desliza sobre una superficie sin rozamiento y sometida a la gravedad  $g$ , desde un punto 1 (localizado en la figura sobre el origen de coordenadas) hasta un punto 2. La coordenada relevante es  $x$  (que crece en el sentido de la gravedad).

Para obtener el funcional que nos dé el tiempo recorrido sobre una curva dada, consideremos los ejes  $xy$  según la Fig. 2, y un pequeño diferencial de longitud  $dl$  a lo largo de la curva, situado a una distancia  $x$  del eje  $y$ . El tiempo que tarda el cuerpo en recorrer el intervalo será  $dt = dl/v$ , siendo  $v$  la velocidad del cuerpo en esa posición  $x$ . Aplicando el principio de conservación de la energía, suponiendo que el cuerpo parte del reposo y poniendo el origen de energía potencial en  $x = 0$ , tenemos  $0 = \frac{1}{2}mv^2 - mgx$ , de donde  $v(x) = \sqrt{2gx}$ , siendo  $g$  la constante de la gravedad terrestre [no confundir con la función  $g(f, f'; x)$ ]. El tiempo total invertido será la suma de los tiempos diferenciales a lo largo de toda la curva:

$$F[f] = \int_1^2 \frac{dl}{v} = \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{\sqrt{1+f'^2}}{\sqrt{2gx}}. \quad (15)$$

El tiempo mínimo se obtendrá con la curva solución de la ecuación de Euler:

$$\frac{\partial g}{\partial f} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial g}{\partial f'} \right) = 0 \quad \text{con} \quad g(f, f'; x) = \sqrt{\frac{1+f'^2}{2gx}}, \quad \begin{cases} f(x_1) = y_1 \\ f(x_2) = y_2 \end{cases} \quad (16)$$

Como  $\partial g / \partial f = 0$ , la ecuación de Euler queda:

$$\frac{\partial g}{\partial f'} = \frac{f'}{\sqrt{2gx(1+f'^2)}} = c, \quad (17)$$

donde  $c$  es una constante. Elevando al cuadrado y despejando  $f'$ :

$$\frac{f'^2}{2gx(1+f'^2)} = c^2 \quad \rightarrow \quad f' = \sqrt{\frac{x}{2a-x}}, \quad 2a \equiv \frac{1}{2gc^2}. \quad (18)$$

Multiplicando y dividiendo por  $\sqrt{x}$ , e integrando:

$$f(x) = \int \frac{xdx}{\sqrt{2ax-x^2}}. \quad (19)$$

Esta integral se puede hacer con el cambio  $x = a(1 - \cos \theta)$ . Entonces:

$$f(x) = \int \frac{a^2(1 - \cos \theta) \sin \theta d\theta}{\sqrt{2a^2(1 - \cos \theta) - a^2(1 - \cos \theta)}} = a \int d\theta(1 - \cos \theta) = a(\theta - \sin \theta) + b. \quad (20)$$

La solución viene dada en paramétricas:

$$\begin{cases} x = a(1 - \cos \theta) \\ y = a(\theta - \sin \theta) + b \end{cases} \quad (21)$$

Las constante  $a, b$  se ajustan con las condiciones de contorno. Tomando, por simplificar,  $x_1 = y_1 = 0$ , tenemos  $\theta_1 = 0$  y  $b = 0$ . Estas ecuaciones corresponden a las de una cicloide de radio  $a$ , Fig. 3. La cicloide es la curva trazada por un punto fijo sobre el borde de un círculo cuando éste rueda sin deslizar sobre una línea, en este caso el eje  $y$ . Las coordenadas de ese punto fijo  $(x, y)$ , con respecto a un origen

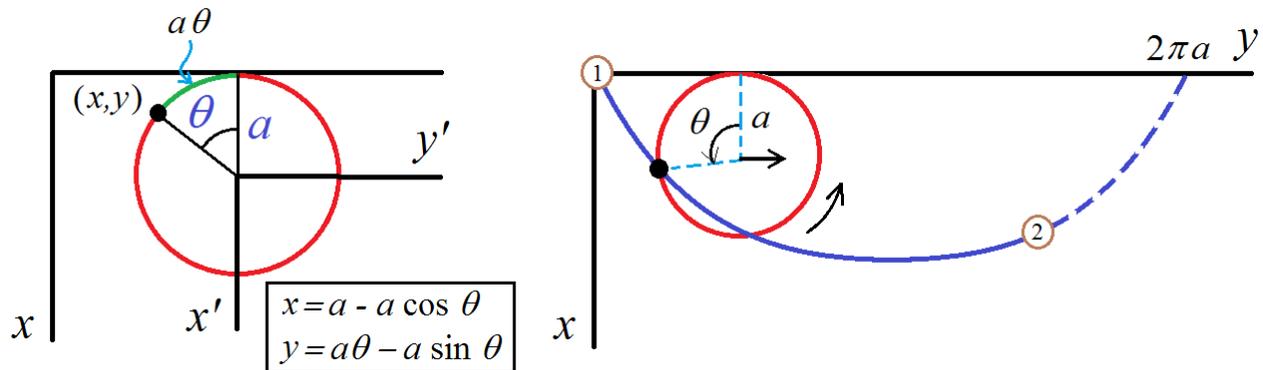


FIG. 3: Problema de la cicloide. A la izquierda, definición de variables junto con los dos sistemas de coordenadas  $xy$  y  $x'y'$ , el primero externo, y el segundo atado al centro del círculo de radio  $a$ . A la derecha, curva cicloide que traza el punto sobre el borde del círculo cuando éste rueda sin deslizar por el eje  $y$ .

$O$ , se pueden calcular en función del ángulo  $\theta$ , sabiendo que la distancia que se desplaza el círculo es igual al arco girado por el punto,  $a\theta$  (condición de no deslizamiento).

### Forma alternativa de la ecuación de Euler

Se puede demostrar que la ecuación

$$\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{d}{dx} \left( g - f' \frac{\partial g}{\partial f'} \right) = 0 \quad (22)$$

llamada *forma alternativa de la ecuación de Euler*, es equivalente a ésta. Es útil cuando la función  $g$  no depende explícitamente de  $x$ , o sea,  $\partial g / \partial x = 0$ ; entonces se obtiene directamente una ecuación diferencial de primer orden:

$$g - f' \frac{\partial g}{\partial f'} = 0. \quad (23)$$

Como ejemplo de aplicación, consideremos el problema de la geodésica sobre una superficie esférica de radio  $R$ , Fig. 4. Tenemos dos puntos, 1 y 2, dados por los ángulos esféricos  $(\theta_1, \varphi_1)$  y  $(\theta_2, \varphi_2)$ . Queremos saber, de entre todas las trayectorias posibles sobre la esfera que pasan por esos dos puntos, cuál de ellas tiene longitud mínima. Para ello construimos primero el funcional. El elemento diferencial de longitud sobre la esfera es (ver Fig. 4):

$$dl = R \sqrt{d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2} = R d\varphi \sqrt{\sin^2 \theta + \left( \frac{d\theta}{d\varphi} \right)^2}. \quad (24)$$

En esta expresión hemos sacado el diferencial  $d\varphi$  de la raíz, dejando claro que va a ser nuestra variable

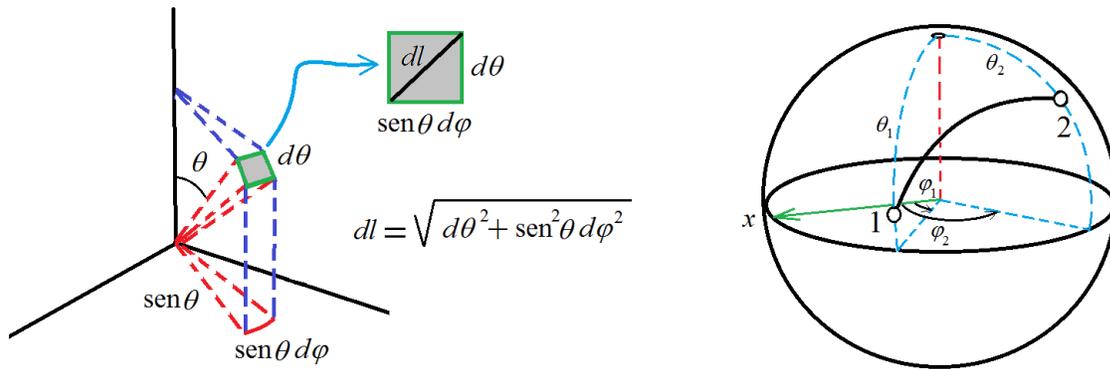


FIG. 4: Problema de la geodésica. Izquierda: elemento de longitud en coordenadas esféricas. Derecha: Definición de puntos 1 y 2, con sus coordenadas esféricas, y curva geodésica entre ellos.

independiente, y que la trayectoria entre los dos puntos 1 y 2 la vamos a representar mediante una función  $\theta(\varphi)$ . Por tanto, la longitud total va a venir dada por el funcional

$$F[\theta] = R \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \sqrt{\sin^2 \theta + \theta'^2}, \quad \begin{cases} \theta(\varphi_1) = \theta_1 \\ \theta(\varphi_2) = \theta_2 \end{cases} \quad (25)$$

A partir de aquí tenemos  $g(\theta, \theta'; \varphi) = R\sqrt{\sin^2 \theta + \theta'^2}$ . Como  $g$  no depende explícitamente de  $\varphi$ , podemos usar la ecuación alternativa de Euler:

$$g - \theta' \frac{\partial g}{\partial \theta'} = R\sqrt{\sin^2 \theta + \theta'^2} - \frac{R\theta'^2}{\sqrt{\sin^2 \theta + \theta'^2}} = aR, \quad (26)$$

donde  $a$  es una constante arbitraria (que hemos multiplicado por  $R$  por conveniencia). Eliminando  $R$ , multiplicando por  $\sqrt{\sin^2 \theta + \theta'^2}$  y reorganizando la ecuación:

$$\sin^2 \theta = a\sqrt{\sin^2 \theta + \theta'^2}. \quad (27)$$

Esta ecuación diferencial se puede resolver separando variables:

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{a}{\sin \theta \sqrt{\sin^2 \theta - a^2}} \rightarrow \varphi = \int \frac{ad\theta}{\sin \theta \sqrt{\sin^2 \theta - a^2}}. \quad (28)$$

Esta integral se puede calcular analíticamente, obteniéndose

$$\varphi = -\arcsin\left(\frac{\cotan \theta}{\beta}\right) + \alpha, \quad \beta = \frac{1 - a^2}{a^2}. \quad (29)$$

(se puede comprobar el resultado derivando y viendo que obtenemos el integrando de (28). Despejando:

$$\cotan \theta = \beta \sin(\alpha - \varphi) = \beta \sin \alpha \cos \varphi - \beta \cos \alpha \sin \varphi. \quad (30)$$

Multiplicando ambos miembros por  $R \sin \theta$ :

$$R \cos \theta = B (R \sin \theta \cos \varphi) - A (R \sin \theta \sin \varphi), \quad (31)$$

donde  $A = \beta \cos \alpha$  y  $B = \beta \sin \alpha$  son constantes. En coordenadas cartesianas esta ecuación se uede escribir

$$Bx - Ay = z, \quad (32)$$

que es la ecuación de un plano que pasa por el origen (centro de la esfera). Esto corresponde a un círculo máximo. Los Por tanto, la trayectoria corresponde a la curva de corte entre un plano que pasa por el origen y la superficie de la esfera, es decir, a un círculo máximo. Las constantes  $A$  y  $B$  se ajustan haciendo que el plano pase por los puntos 1 y 2, es decir, imponiendo las ecuaciones

$$\cos \theta_1 = B \sin \theta_1 \cos \varphi_1 - A \sin \theta_1 \sin \varphi_1, \quad \cos \theta_2 = B \sin \theta_2 \cos \varphi_2 - A \sin \theta_2 \sin \varphi_2. \quad (33)$$

### Funcionales con varias variables dependientes

La situación más frecuente, sobre todo en mecánica, es que tengamos varias funciones  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_N(x) \equiv \{f_i(x)\}$ , en lugar de una sola. El funcional sería

$$F[\{f_i\}] = \int_{x_1}^{x_2} dx g(f_1, f_1', f_2, f_2', \dots, f_N, f_N'; x), \quad (34)$$

con las condiciones  $f_i(x_1) = f_i^{(1)}$ ,  $f_i(x_2) = f_i^{(2)}$ . La condición extremal para el funcional se obtiene resolviendo un conjunto de  $N$  ecuaciones de Euler,

$$\frac{\partial g}{\partial f_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial g}{\partial f_i'} \right) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (35)$$

Esto se puede demostrar de la misma forma que para una sola función, a base de obtener la variación  $\delta F$  en función de las variaciones de las funciones,  $\delta f_i$ , suponiendo que estas variaciones son nulas en los extremos del intervalo  $[x_1, x_2]$ . Se llega así a la ecuación,

$$\delta F = \sum_{i=1}^N \int_{x_1}^{x_2} dx \left[ \frac{\partial g}{\partial f_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial g}{\partial f_i'} \right) \right] \delta f_i(x) = 0, \quad (36)$$

de la cual se sigue (35) imponiendo que las variaciones  $\delta f_i$  son todas arbitrarias e independientes.

Nuevamente, las ecuaciones (35) y (36) son equivalentes a la situación en cálculo de funciones. Para una función con dos variables,  $f(x, y)$ , calculamos los extremos (mínimos o máximos) de la función preguntándonos por los valores de  $(x, y)$  para los cuales la variación de  $f$  es nula:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0. \quad (37)$$

Esta ecuación es lo equivalente a (36). Puesto que las variaciones  $dx$  y  $dy$  son arbitrarias e independientes, la única manera de asegurar que  $df = 0$  es imponer que ambas derivadas parciales sean nulas:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0. \quad (38)$$

Estas ecuaciones del cálculo en funciones son lo equivalente a (35) en cálculo variacional.

## Ligaduras

En muchas ocasiones en las que existen varias funciones  $f_i(x)$  hay además una o más relaciones entre ellas, llamadas *ligaduras*. Para ver cómo se procede, vamos a desarrollar el procedimiento con sólo dos funciones,  $f_1$  y  $f_2$ , y con un funcional que, en principio, depende de las dos,  $F[f_1, f_2]$ . Supongamos que existe una relación entre las dos funciones, de la forma  $G(f_1, f_2) = 0$ .

- Un procedimiento posible sería usar la relación  $G(f_1, f_2) = 0$  para despejar una función en términos de la otra, por ejemplo,  $f_2 = H(f_1)$ . Sustituyendo en la función  $g(f_1, f'_1, f_2, f'_2; x)$ :

$$g(f_1, f'_1, f_2, f'_2; x) = g(f_1, f'_1, H(f_1), H'(f_1); x) = \tilde{g}(f_1, f'_1; x). \quad (39)$$

Nótese que  $f'_2 = H'(f_1)f'_1$  aplicando la regla de la cadena. El funcional pasa a ser  $F[f_1, f_2] = \tilde{F}[f_1]$ :

$$F[f_1, f_2] = \tilde{F}[f_1] = \int_{x_1}^{x_2} dx g(f_1, f'_1, f_2, f'_2; x) = \int_{x_1}^{x_2} dx \tilde{g}(f_1, f'_1; x). \quad (40)$$

La ecuación de Euler será:

$$\frac{\partial \tilde{g}}{\partial f_1} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial \tilde{g}}{\partial f'_1} \right) = 0. \quad (41)$$

Una vez obtenida la solución  $f_1(x)$ , la otra función se calcula a partir de  $f_2(x) = H(f_1(x))$ . El éxito de este procedimiento depende de que podamos despejar  $f_2$  en función de  $f_1$ , lo cual no será posible siempre.

- Otro procedimiento es utilizar el método de los *multiplicadores de Lagrange*. Este método es general y no depende de que podamos manipular la ecuación de ligadura. Como en el caso no ligado, calculamos la variación del funcional,

$$\delta F = \int_{x_1}^{x_2} dx \left\{ \left[ \frac{\partial g}{\partial f_1} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial g}{\partial f'_1} \right) \right] \delta f_1(x) + \left[ \frac{\partial g}{\partial f_2} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial g}{\partial f'_2} \right) \right] \delta f_2(x) \right\} = 0. \quad (42)$$

Ahora relacionamos las variaciones  $\delta f_1$  y  $\delta f_2$  a base de diferenciar la ecuación de ligadura:

$$\delta G = \frac{\partial G}{\partial f_1} \delta f_1(x) + \frac{\partial G}{\partial f_2} \delta f_2(x) = 0, \quad (43)$$

de donde obtenemos la relación entre las variaciones; por ejemplo, despejando  $\delta f_2(x)$ :

$$\delta f_2(x) = -\frac{\partial G/\partial f_1}{\partial G/\partial f_2} \delta f_1(x). \quad (44)$$

Sustituyendo en (42):

$$\delta F = \int_{x_1}^{x_2} dx \left\{ \left[ \frac{\partial g}{\partial f_1} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial g}{\partial f_1'} \right) \right] - \left[ \frac{\partial g}{\partial f_2} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial g}{\partial f_2'} \right) \right] \frac{\partial G/\partial f_1}{\partial G/\partial f_2} \right\} \delta f_1(x) = 0. \quad (45)$$

Como la variación  $\delta f_1(x)$  es arbitraria, la condición para que esta ecuación se cumpla es que el término entre llaves sea nulo:

$$\left[ \frac{\partial g}{\partial f_1} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial g}{\partial f_1'} \right) \right] \left( \frac{\partial G}{\partial f_1} \right)^{-1} = \left[ \frac{\partial g}{\partial f_2} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial g}{\partial f_2'} \right) \right] \left( \frac{\partial G}{\partial f_2} \right)^{-1}. \quad (46)$$

Ambos miembros de esta igualdad son en realidad una función de  $x$ , ya que se trata de la ecuación de equilibrio satisfecha por las funciones  $f_1(x)$  y  $f_2(x)$  que son solución al problema, y que se supone que vamos a sustituir en la ecuación (una vez resuelta). Llamando a esta función común  $-\lambda(x)$ , obtenemos dos ecuaciones que, junto con la condición de ligadura, proporcionan tres ecuaciones con tres incógnitas: las funciones  $f_1(x)$  y  $f_2(x)$ , y el *multiplicador de Lagrange*  $\lambda(x)$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial f_1} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial g}{\partial f_1'} \right) + \lambda(x) \frac{\partial G}{\partial f_1} = 0, & \frac{\partial g}{\partial f_2} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial g}{\partial f_2'} \right) + \lambda(x) \frac{\partial G}{\partial f_2} = 0, \\ G(f_1, f_2) = 0. \end{cases} \quad (47)$$

En el caso general de  $N$  funciones  $f_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, N$ , con  $M$  ligaduras  $G_j(\{f_i\}) = 0$ ,  $j = 1, \dots, M$  (con  $M < N$ ), las ecuaciones son

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial f_i} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial g}{\partial f_i'} \right) + \sum_{j=1}^M \lambda_j(x) \frac{\partial G_j}{\partial f_i} = 0, & i = 1, \dots, N \\ G_j(\{f_i\}) = 0, & j = 1, \dots, M \end{cases} \quad (48)$$

Habría  $N + M$  ecuaciones en las  $N + M$  funciones incógnita  $\{f_i(x)\}$  y  $\lambda_j(x)$ . Obsérvese que existe un multiplicador de Lagrange por cada ligadura. En este método, uno considera que las variables son independientes en primera instancia, pero aplica las ecuaciones anteriores para obtener la silución ligada. Nótese además que las ecuaciones de arriba son equivalentes a extremizar el funcional

$$\tilde{F}[\{f_i\}] = F[\{f_i\}] + \sum_{j=1}^M \int_{x_1}^{x_2} dx \lambda_j(x) G_j(\{f_i\}), \quad (49)$$

con respecto a todas las  $\{f_i\}$  y las  $\{\lambda_j(x)\}$ . En efecto:

$$\begin{aligned}
\delta\tilde{F}[\{f_i\}] &= \delta F[\{f_i\}] + \delta \sum_{j=1}^M \int_{x_1}^{x_2} dx \lambda_j(x) G_j(\{f_i\}) \\
&= \int_{x_1}^{x_2} dx \sum_{i=1}^N \left[ \frac{\partial g}{\partial f_i} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial g}{\partial f'_i} \right) \right] \delta f_i(x) \\
&\quad + \int_{x_1}^{x_2} dx \sum_{j=1}^M \left[ G_j(\{f_i\}) \delta \lambda_j(x) + \lambda_j(x) \sum_{i=1}^N \frac{\partial G}{\partial f_i} \delta f_i(x) \right]. \tag{50}
\end{aligned}$$

Organizando los términos:

$$\begin{aligned}
\delta\tilde{F}[\{f_i\}] &= \int_{x_1}^{x_2} dx \left\{ \sum_{i=1}^N \left[ \frac{\partial g}{\partial f_i} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial g}{\partial f'_i} \right) + \sum_{j=1}^M \lambda_j(x) \frac{\partial G}{\partial f_i} \right] \delta f_i(x) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{j=1}^M G_j(\{f_i\}) \delta \lambda_j(x) \right\}. \tag{51}
\end{aligned}$$

Como estamos considerando que las variables son independientes, todos los coeficientes de las variaciones  $\delta f_i$  y  $\delta \lambda_j$  han de anularse, lo cual implica las ecuaciones (48).

Esta técnica es completamente análoga a la del cálculo en funciones de varias variables. Supongamos una función  $f(x, y)$  a la que queremos calcular los extremos; pero existe una ecuación que liga las variables,  $h(x, y) = 0$ . Como las variaciones  $dx$  y  $dy$  están relacionadas mediante

$$dh = \frac{\partial h}{\partial x} dx + \frac{\partial h}{\partial y} dy \quad \rightarrow \quad dy = -\frac{\partial h / \partial x}{\partial h / \partial y} dx \tag{52}$$

(donde hemos despejado  $dy$  en términos de  $dx$ ; se podía haber hecho al revés), la variación en la función viene dada por:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = \left( \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial h / \partial x}{\partial h / \partial y} \right) dx = 0. \tag{53}$$

Como  $dx$  es arbitrario, el término entre paréntesis ha de ser nulo:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^{-1} = \frac{\partial f}{\partial y} \left( \frac{\partial h}{\partial y} \right)^{-1}. \tag{54}$$

Como esta ecuación se verifica para valores concretos de  $(x, y)$ , ambos miembros son iguales a una misma constante, que llamamos  $-\lambda$ . De aquí resultan las tres ecuaciones

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial h}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial h}{\partial y} = 0, \quad h(x, y) = 0, \tag{55}$$

que permiten obtener las tres incógnitas  $x, y$  y  $\lambda$ . Nótese que las ecuaciones anteriores se pueden poner también como

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \lambda} = 0, \quad (56)$$

donde la función a extremizar es  $\tilde{f}(x, y) \equiv f(x, y) + \lambda h(x, y)$ .

### Principio de Fermat en óptica

Este principio fue formulado por Fermat 1662 en para describir la trayectoria de rayos de luz en medios de índice de refracción no homogéneos. En su versión moderna, el principio dice que el funcional que da el tiempo que tarda la luz en ir de un punto 1 a un punto 2 es extremo con respecto a variaciones de su trayectoria. El funcional es:

$$F[f] = \int_1^2 dt = \int_1^2 \frac{ds}{v} = \frac{1}{c} \int_1^2 n ds, \quad (57)$$

donde  $n$  es el índice de refracción y  $c$  la velocidad de la luz en el vacío. Por ejemplo, en el plano  $xy$  en el que  $n$  dependa de ambas variables,  $n(x, y)$ , tendremos:

$$\delta F = \frac{1}{c} \delta \int_{x_1}^{x_2} dx n(x, f(x)) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} = 0. \quad (58)$$

Este problema se resuelve mediante una ecuación de Euler con  $g(f, f'; x) = n(x, f) \sqrt{1 + f'^2}$ .

### III. PRINCIPIO DE HAMILTON

Sea un sistema con  $N$  partículas, con coordenadas cartesianas  $x_{\alpha i}$ ,  $\alpha = 1, \dots, N$ ,  $i = 1, 2, 3$ , que interaccionan mediante fuerzas conservativas. Sea  $T = E_c$  la energía cinética del sistema, y  $U$  su energía potencial. Definimos el funcional de acción como

$$S[\{x_{\alpha i}\}] = \int_{t_1}^{t_2} dt L(\{x_{\alpha i}, \dot{x}_{\alpha i}\}), \quad L(\{x_{\alpha i}, \dot{x}_{\alpha i}\}) \equiv T(\{\dot{x}_{\alpha i}\}) - U(\{x_{\alpha i}\}), \quad (59)$$

donde  $L$  es el *lagrangiano*. La acción  $S$  es un número (con dimensiones de momento angular) asociado a cada trayectoria del sistema que pasa por dos puntos en sendos instantes de tiempo  $t_1 < t_2$ :

$$x_{\alpha i}(t_1) = x_{\alpha i}^{(1)}, \quad x_{\alpha i}(t_2) = x_{\alpha i}^{(2)} \quad (60)$$

siendo  $\{x_{\alpha i}^{(1)}, x_{\alpha i}^{(2)}\}$  constantes. Entonces, de entre todas las (infinitas) posibles, la trayectoria real del sistema (la que sigue en su evolución dinámica), dada por  $x_{\alpha i}(t)$ , está dada por el extremo del funcional de acción, o sea, por la ecuación:

$$\delta S = 0. \quad (61)$$

Según el cálculo variacional, este problema implica las ecuaciones de Euler

$$\frac{\partial L}{\partial x_{\alpha i}} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_{\alpha i}} \right) = 0, \quad \begin{cases} x_{\alpha i}(t_1) = x_{\alpha i}^{(1)} \\ x_{\alpha i}(t_2) = x_{\alpha i}^{(2)} \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = 1, \dots, N \\ i = 1, 2, 3. \end{cases} \quad (62)$$

que en este contexto se llaman *ecuaciones de Euler-Lagrange* o simplemente *ecuaciones de Lagrange*.

Como ejemplo de que estas ecuaciones son equivalentes a las de Newton, consideremos un oscilador armónico en una dimensión. Tenemos una sola partícula, de masa  $m$ , atada a un muelle de constante  $k$  (tomamos su longitud de equilibrio como nula por conveniencia). El lagrangiano es:

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2. \quad (63)$$

Entonces:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -kx, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{d}{dt} (m\dot{x}) = m\ddot{x}, \quad (64)$$

y la ecuación de Lagrange es:

$$m\ddot{x} + km = 0, \quad (65)$$

que coincide con la de Newton.

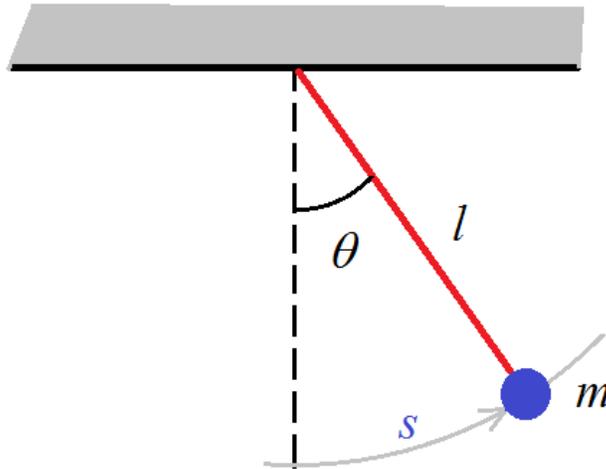


FIG. 5: Péndulo simple.

Veamos otro ejemplo: un péndulo simple, Fig. 6. Tenemos una masa  $m$  colgada del techo mediante un hilo inextensible de longitud  $l$ . La energía cinética es  $T = \frac{1}{2}m\dot{s}^2$ , donde  $s$  es el arco recorrido. Pero  $s = l\theta$ , siendo  $\theta$  el ángulo medido desde la vertical, con lo cual  $T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$ . La energía potencial es

$U = mgl(1 - \cos \theta)$  (poniendo el cero de energía potencial en el punto más bajo). Entonces el lagrangiano es

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl(1 - \cos \theta). \quad (66)$$

Aunque  $\theta$  no es una coordenada cartesiana, vamos a escribir provisionalmente la ecuación de movimiento como la ecuación de Lagrange para el ángulo  $\theta$ . Tenemos:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = 0. \quad (67)$$

Entonces:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgl \sin \theta, \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{d}{dt} (ml^2\dot{\theta}) = ml^2\ddot{\theta}, \quad (68)$$

o sea,

$$mgl \sin \theta + ml^2\ddot{\theta} = 0 \quad \rightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0. \quad (69)$$

Nuevamente, la ecuación de Lagrange coincide con la de Newton. Pero, ¿tenemos derecho a usar las ecuaciones de Lagrange para coordenadas que no son cartesianas? Sí, el principio de Hamilton general lo permite cuando lo formulamos en las llamadas *coordenadas generalizadas*, y ahí radica la potencia de la mecánica lagrangiana.

Antes de formular el principio general, vamos a introducir las coordenadas generalizadas.

#### IV. COORDENADAS GENERALIZADAS

Un sistema dado de  $N$  partículas puede estar sometido a ligaduras (restricciones sobre el movimiento de las partículas). Es el caso de una masa que se mueve sobre un plano horizontal (cuyo movimiento en la dirección normal se encuentra anulado), o una masa que forma un péndulo simple (cuya distancia al centro de rotación es constante). Se llaman *grados de libertad* de un sistema,  $s$ , al número de maneras independientes en que se puede mover éste (incluyendo implícitamente las ligaduras). Entonces  $s = 3N - M$ , donde  $M$  es el número de ligaduras.

Llamamos *coordenadas generalizadas* a cualquier conjunto de  $s$  coordenadas que nos permite especificar de manera única el estado del sistema. Pueden ser coordenadas cartesianas, angulares, etc. El conjunto de coordenadas generalizadas es:

$$q_1(t), q_2(t), \dots, q_s(t) = \{q_j(t)\}. \quad (70)$$

A este conjunto asociamos un conjunto de *velocidades generalizadas*:

$$\dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t), \dots, \dot{q}_s(t) = \{\dot{q}_j(t)\}. \quad (71)$$

A partir de las coordenadas cartesianas, y siempre que las ecuaciones de ligadura sean *holónomas* (esto es, involucren sólo coordenadas y no velocidades), vamos a poder poner unas coordenadas cartesianas en términos de las otras y definir un conjunto posible de coordenadas generalizadas. Si este es el caso, las coordenadas generalizadas se van a poder relacionar con las coordenadas cartesianas mediante:

$$x_{\alpha i} = x_{\alpha i}(q_1, q_2, \dots, q_s; t) = x_{\alpha i}(\{q_j\}; t), \quad (\text{a})$$

$$\dot{x}_{\alpha i} = \dot{x}_{\alpha i}(\{q_j, \dot{q}_j\}; t). \quad (\text{b})$$

La relación implica, en general, al tiempo (debido a que puede haber ligaduras móviles). Siempre que el jacobiano de la transformación anterior sea no nulo, existirá una transformación inversa:

$$q_j = q_j(\{x_{\alpha i}\}; t), \quad \dot{q}_j = \dot{q}_j(\{x_{\alpha i}, \dot{x}_{\alpha i}\}; t). \quad (72)$$

## V. PRINCIPIO DE HAMILTON GENERAL Y ECUACIONES DE LAGRANGE

El principio de Hamilton para sistemas conservativos en coordenadas generalizadas es:

$$\delta S[\{q_j\}] = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt L(\{q_j, \dot{q}_j\}; t) = 0, \quad (73)$$

donde  $L$  es el lagrangiano, que se puede construir a través de las fórmulas de transformación entre coordenadas cartesianas y generalizadas:

$$\begin{aligned} L(\{x_{\alpha i}, \dot{x}_{\alpha i}\}) &= T(\{x_{\alpha i}\}) - U(\{\dot{x}_{\alpha i}\}) \\ &= T(\{q_j, \dot{q}_j\}; t) - U(\{q_j\}; t) \equiv L(\{q_j, \dot{q}_j\}; t). \end{aligned} \quad (74)$$

El extremo del funcional es equivalente a las ecuaciones de Lagrange en coordenadas generalizadas:

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) = 0, \quad j = 1, \dots, s.} \quad (75)$$

Para ver la utilidad y la potencia de estas ecuaciones generales, reconsideremos el problema del péndulo. Primero, vemos que el sistema tiene un único grado de libertad,  $s = 1$ , puesto que tenemos una partícula,  $N = 1$ , y hay dos ligaduras (la masa se mueve en un plano, y su distancia al centro de rotación es constante),  $M = 2$ . Por tanto,  $s = 3 \times 1 - 2 = 1$ . Necesitamos una coordenada generalizada, sea  $q$ .

Una posible coordenada es el ángulo medido desde la vertical,  $q = \theta$ . Las coordenadas cartesianas de la masa son:

$$x = l \sin \theta, \quad y = -l \cos \theta, \quad (76)$$

que constituyen las ecuaciones (72a) de este problema (hemos situado el origen  $O$  en el centro de rotación, y el eje  $x$  horizontal hacia la derecha). Las velocidades cartesianas son:

$$\dot{x} = l\dot{\theta} \cos \theta, \quad \dot{y} = l\dot{\theta} \sin \theta, \quad (77)$$

que constituyen las ecuaciones (72b). Construimos ahora la energía cinética, partiendo de la expresión en cartesianas:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2. \quad (78)$$

La energía potencial (poniendo el cero de energías potenciales en el origen) es

$$U = mgy = -mgl \cos \theta. \quad (79)$$

El lagrangiano en coordenadas generalizadas es

$$L = T - U = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl \cos \theta, \quad (80)$$

y la ecuación de Lagrange es

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = -mgl \sin \theta - \frac{d}{dt} (ml^2\dot{\theta}) = -mgl \sin \theta - ml^2\ddot{\theta} = 0, \quad (81)$$

de donde resulta nuevamente la ecuación del péndulo simple,  $\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$ .

En un problema concreto puede haber muchas elecciones posibles para el conjunto de coordenadas generalizadas. Pero unos son más convenientes que otros. El criterio para buscar es elegir aquellas para las que la energía potencial no dependa de alguna coordenada (estas son las llamadas *coordenadas ignorables*, que dan lugar a leyes de conservación, como veremos más adelante). Por ejemplo, en el movimiento de un proyectil en 2D bajo la acción de la gravedad, necesitamos dos coordenadas. Si elegimos coordenadas cartesianas  $(x, y)$ , el lagrangiano es

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy. \quad (82)$$

Como  $\partial L / \partial x = 0$ , la ecuación de Lagrange para  $x$  es muy simple:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} = \text{const.} \quad (83)$$

Esta ecuación expresa la conservación del momento lineal en la dirección  $x$ . La ecuación para  $y$  es también simple:

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) = -mg - m\ddot{y} = 0 \rightarrow \ddot{y} = -g. \quad (84)$$

Si escogemos coordenadas polares, las ecuaciones que resultan son por contra muy complejas:

$$\begin{cases} \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2 + g \sin \varphi = 0, \\ \rho^2\ddot{\varphi} + 2\rho\dot{\rho}\dot{\varphi} + g\rho \cos \varphi = 0. \end{cases} \quad (85)$$

Vamos a analizar el significado físico de las ecuaciones de Lagrange (75). Para ello, supongamos que las coordenadas generalizadas son coordenadas cartesianas. Tendremos  $L(\{q_j, \dot{q}_j\}) = T(\{\dot{q}_j\}) - U(\{q_j\})$ , y

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) = -\frac{\partial U}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) \quad (86)$$

El primer término del segundo miembro es igual a  $Q_j$  (una componente de la fuerza conservativa),  $Q_j = -\frac{\partial U}{\partial q_j}$ , mientras que el segundo, al ser  $T$  una función cuadrática homogénea de las velocidades (esto es cierto sólo en coordenadas cartesianas, como veremos más adelante), será igual a  $m\ddot{q}_j$ . Nos queda la ecuación

$$m\ddot{q}_j = Q_j, \quad (87)$$

que no es más que la ecuación de movimiento de Newton. Las ecuaciones de Lagrange son más generales, en el sentido de que tienen la misma forma para cualquier conjunto de coordenadas. En general, para coordenadas generalizadas cualesquiera (no necesariamente cartesianas) y sistemas en los que  $U = U(\{q_j\}; t)$ , podremos escribir las ecuaciones de Lagrange como

$$\frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{\partial U}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) = 0,$$

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j} \quad (88)$$

donde  $Q_j$  es la *fuerza generalizada*,

$$Q_j \equiv -\frac{\partial U}{\partial q_j}. \quad (89)$$

## VI. EJEMPLOS

Vamos a ver tres ejemplos de aplicación.

- Partícula de masa  $m$  sobre la superficie de un cono de ángulo de apertura  $\alpha$ . En principio tenemos tres coordenadas, pero debido a la ligadura (la partícula se encuentra sobre una superficie) el número de coordenadas se reduce a dos,  $s = 2$ . Usando coordenadas cilíndricas  $(\rho, \varphi, z)$ , eliminamos una mediante la ligadura, cuya ecuación es  $\rho = z \tan \frac{\alpha}{2}$ . Eliminemos  $z$  en función de  $\rho$ . Las coordenadas y velocidades cartesianas son:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = \rho \cotan \frac{\alpha}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = \dot{\rho} \cos \varphi - \rho \dot{\varphi} \sin \varphi \\ \dot{y} = \dot{\rho} \sin \varphi + \rho \dot{\varphi} \cos \varphi \\ \dot{z} = \dot{\rho} \cotan \frac{\alpha}{2} \end{cases} \quad (90)$$

La energía cinética es:

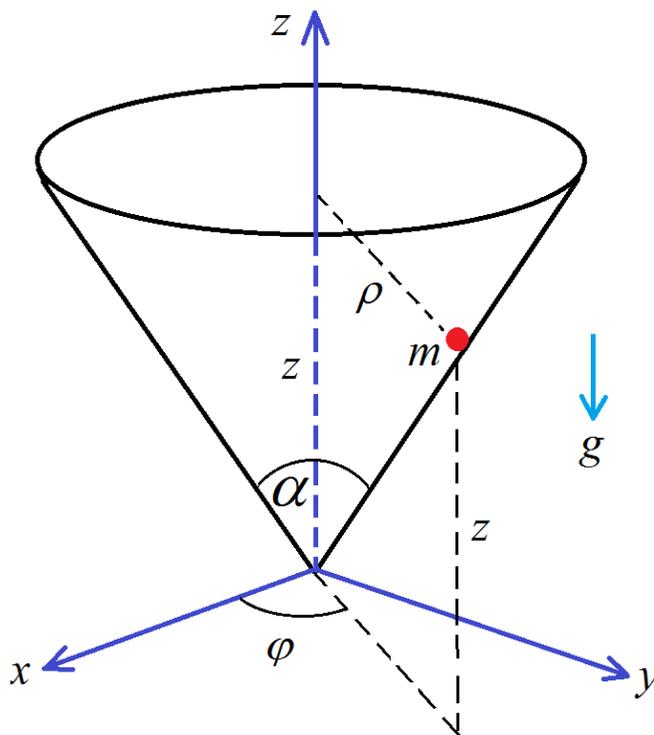


FIG. 6: Partícula que se mueve sobre la superficie interior de un cono.

$$T = \frac{1}{2}m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}m \left( \dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{\rho}^2 \cotan^2 \frac{\alpha}{2} \right). \quad (91)$$

Como

$$1 + \cotan^2 \frac{\alpha}{2} = 1 + \frac{1}{\tan^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \operatorname{cosec}^2 \frac{\alpha}{2}, \quad (92)$$

podemos simplificar  $T$  un poco:

$$T = \frac{1}{2}m \left( \dot{\rho}^2 \operatorname{cosec}^2 \frac{\alpha}{2} + \rho^2 \dot{\varphi}^2 \right). \quad (93)$$

La energía potencial (situando el origen en el vértice del cono) es

$$U = mgz = mg\rho \cotan \frac{\alpha}{2}, \quad (94)$$

con lo que el lagrangiano es

$$L = \frac{1}{2}m \left( \dot{\rho}^2 \operatorname{cosec}^2 \frac{\alpha}{2} + \rho^2 \dot{\varphi}^2 \right) - mg\rho \cotan \frac{\alpha}{2}. \quad (95)$$

Escribamos las ecuaciones de Lagrange. Como  $\partial L / \partial \varphi = 0$ , la ecuación para  $\varphi$  es

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m\rho^2 \dot{\varphi} = \text{const.} \equiv l_z \quad (96)$$

Esta ecuación expresa la conservación de la componente  $z$  del momento angular de la partícula:

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= m\mathbf{r} \times \mathbf{v} = m(\rho\hat{\mathbf{e}}_\rho + z\hat{\mathbf{e}}_z) \times (\dot{\rho}\hat{\mathbf{e}}_\rho + \rho\dot{\varphi}\hat{\mathbf{e}}_\varphi + \dot{z}\hat{\mathbf{e}}_z) \\ &= -z\rho\dot{\varphi}\hat{\mathbf{e}}_\rho + m(z\dot{\rho} - \rho\dot{z})\hat{\mathbf{e}}_\varphi + m\rho^2\dot{\varphi}\hat{\mathbf{e}}_z \\ &= -\rho^2\dot{\varphi} \cotan \frac{\alpha}{2} \hat{\mathbf{e}}_\rho + m\rho^2\dot{\varphi}\hat{\mathbf{e}}_z. \end{aligned} \quad (97)$$

La ecuación de Lagrange para  $\rho$  es:

$$\frac{\partial L}{\partial \rho} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} \right) = m\rho\dot{\varphi}^2 - mg \cotan \frac{\alpha}{2} - m\ddot{\rho} \operatorname{cosec}^2 \frac{\alpha}{2} = 0. \quad (98)$$

Eliminando  $\dot{\varphi}$  en términos de  $l_z$ , y sustituyendo en la ecuación para  $\rho$ , llegamos a

$$\ddot{\rho} - \frac{l_z^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{m^2 \rho^3} + \frac{1}{2}g \sin \alpha = 0. \quad (99)$$

- Péndulo simple en un tren acelerado. Vamos a situar a nuestro sistema de referencia inercial a la altura del techo del cual pende la masa. Con respecto a este sistema inercial, el tren se mueve con velocidad  $a = \text{const.}$  El número de grados de libertad es  $s = 1$ , ya que se trata de un péndulo (y el tren se mueve con aceleración constante). Tomaremos como coordenada generalizada  $q = \theta$ . Las coordenadas inerciales cartesianas de la masa son:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}at^2 + l \sin \theta \\ y = -l \cos \theta \end{cases} \quad (100)$$

donde hemos tomado como instante inicial  $t_0 = 0$ , como posición inicial del punto  $O'$  del tren  $x_0 = 0$ , y como velocidad inicial del tren  $v_0 = 0$ . Las velocidades inerciales cartesianas son:

$$\begin{cases} \dot{x} = at + l\dot{\theta} \cos \theta \\ \dot{y} = -\dot{\theta}l \sin \theta \end{cases} \quad (101)$$

Observemos que las relaciones entre coordenadas y velocidades cartesianas y coordenadas y velocidades generalizadas contienen al tiempo  $t$ . El lagrangiano es:

$$L = T - U = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy = \frac{1}{2}m(at + l\dot{\theta} \cos \theta)^2 + \frac{1}{2}m\dot{\theta}^2 l^2 \sin^2 \theta + mgl \cos \theta = \frac{1}{2}ma^2 t^2 + \frac{1}{2}ml^2 \dot{\theta}^2 + matl\dot{\theta} \cos \theta + mgl \cos \theta. \quad (102)$$

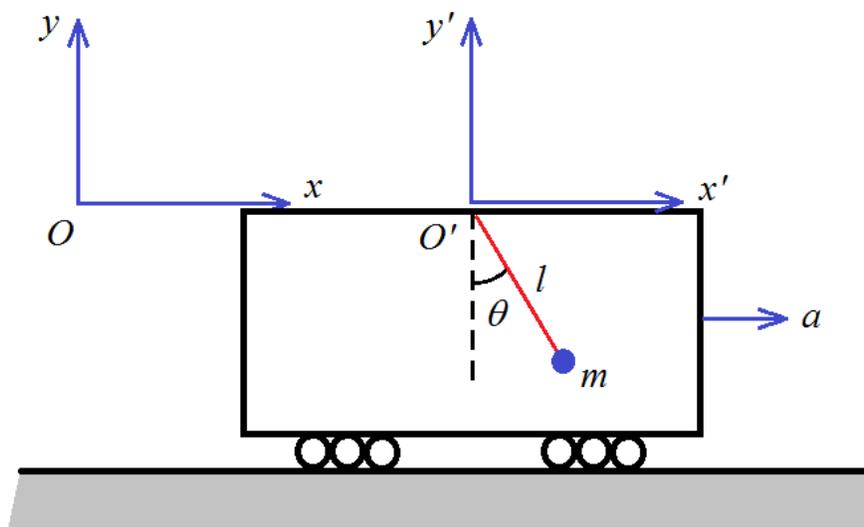


FIG. 7: Péndulo simple moviéndose solidariamente con un tren acelerado.

La ecuación de Lagrange es:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) &= -matl\dot{\theta} \sin \theta - mgl \sin \theta - \frac{d}{dt} (ml^2 \dot{\theta} + matl \cos \theta) \\ &= -matl\dot{\theta} \sin \theta - mgl \sin \theta - ml^2 \ddot{\theta} - mal \cos \theta + matl\dot{\theta} \sin \theta = 0. \end{aligned} \quad (103)$$

Simplificando:

$$\ddot{\theta} + \frac{a}{l} \cos \theta + \frac{g}{l} \sin \theta = 0. \quad (104)$$

Esta ecuación es como la del péndulo simple, salvo por la presencia del segundo término. Este término es el debido a la aceleración del tren (en mecánica newtoniana hablaríamos de que es una fuerza inercial). Obviamente, cuando el tren no está acelerado,  $a = 0$ , y se recupera la ecuación del péndulo simple normal (esta ecuación sería válida también aunque el tren tuviera una velocidad constante, ya que el tren sería un sistema inercial y el movimiento sería del mismo tipo que el que se da en el sistema inercial exterior). El análisis del problema mediante mecánica newtoniana se

hace en el apéndice A.

La ecuación (104) posee un punto de equilibrio, que es aquel en el que  $\dot{\theta} = 0$  y  $\ddot{\theta} = 0$ . Sustituyendo, obtenemos una ecuación para el ángulo de equilibrio  $\theta_e$ :

$$\frac{a}{l} \cos \theta_e + \frac{g}{l} \sin \theta_e = 0 \quad \rightarrow \quad \tan \theta_e = -\frac{a}{g}. \quad (105)$$

El ángulo es negativo si  $a > 0$  (lo cual tiene sentido físico), y nulo si  $a = 0$  (situación de tren inercial). ¿Cómo es el movimiento alrededor de ese ángulo, es decir, cuando  $\theta$  es próximo a  $\theta_e$ ? Introduzcamos la variable  $\eta = \theta - \theta_e$ , que mide las desviaciones con respecto a ese ángulo de equilibrio. Suponemos  $|\eta| \ll 1$ . Sustituyendo en (104):

$$\begin{aligned} & \ddot{\eta} + \frac{a}{l} \cos(\eta + \theta_e) + \frac{g}{l} \sin(\eta + \theta_e) \\ &= \ddot{\eta} + \frac{a}{l} (\cos \eta \cos \theta_e - \sin \eta \sin \theta_e) + \frac{g}{l} (\sin \eta \cos \theta_e + \cos \eta \sin \theta_e) \\ &= \ddot{\eta} + \left( \frac{a}{l} \cos \theta_e + \frac{g}{l} \sin \theta_e \right) \cos \eta + \left( -\frac{a}{l} \sin \theta_e + \frac{g}{l} \cos \theta_e \right) \sin \eta = 0, \end{aligned} \quad (106)$$

o bien, aplicando la condición de equilibrio y tomando  $\sin \eta \simeq \eta$ :

$$\ddot{\eta} + \left( \frac{a}{l} \sin \theta_e - \frac{g}{l} \cos \theta_e \right) \eta = 0. \quad (107)$$

Esta es la ecuación de un péndulo simple. La frecuencia de oscilación se puede obtener como sigue. Tenemos las ecuaciones:

$$\begin{cases} a \cos \theta_e + g \sin \theta_e = 0 \\ \cos^2 \theta_e + \sin^2 \theta_e = 1 \end{cases} \quad (108)$$

de donde se pueden despejar el seno y el coseno:

$$\cos \theta_e = \frac{g}{\sqrt{g^2 + a^2}}, \quad \sin \theta_e = -\frac{a}{\sqrt{g^2 + a^2}} \quad (109)$$

(la solución donde se cambia el signo al seno y al coseno también es válida matemáticamente; aquí, sin embargo, nos interesa aquella con  $\theta_e < 0$ ). Entonces, sustituyendo:

$$\frac{a}{l} \sin \theta_e - \frac{g}{l} \cos \theta_e = \frac{\sqrt{g^2 + a^2}}{l}, \quad (110)$$

y la ecuación queda:

$$\ddot{\eta} + \omega^2 \eta = 0, \quad \omega^2 = \frac{\sqrt{g^2 + a^2}}{l}. \quad (111)$$

Vemos que la frecuencia de oscilaciones es igual a  $\sqrt{g/l}$  cuando  $a = 0$  (como debe ser). Además, cuando  $a \neq 0$  (es decir, cuando el tren se acelera) la frecuencia aumenta. Este podría ser un buen test para ver que un tren está acelerado si estuvieramos en su interior (ángulo de equilibrio no nulo y frecuencia superior a lo normal).

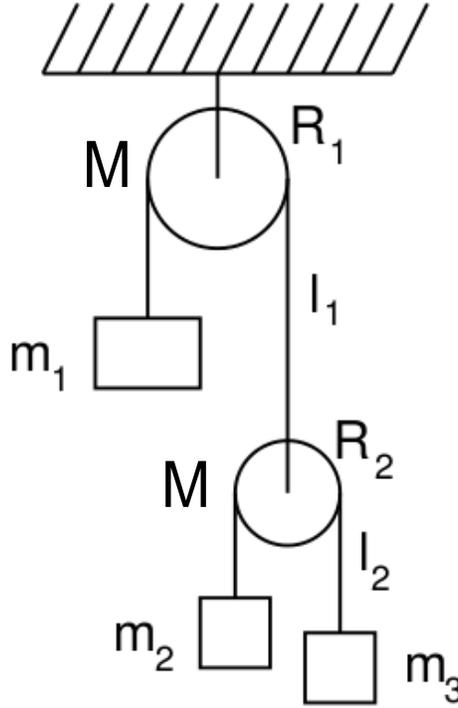


FIG. 8: Doble polea con tres masas sometidas a la gravedad.

- Doble polea. Se tienen tres masas conectadas mediante cuerdas de masa despreciable (y longitudes  $l_1$  y  $l_2$ ) y poleas, como en la Fig. 8 (suponemos además, para simplificar, que los radios de las poleas son despreciables y no tienen inercia). Situando el origen de coordenadas  $O$  en el eje de la polea 1 y el eje  $x$  hacia abajo, y teniendo en cuenta que sólo hay dos grados de libertad, escogemos como coordenadas generalizadas  $q_1$  (distancia entre eje de la polea 1 y la masa  $m_1$ ) y  $q_2$  (distancia entre el eje de la polea 2 y la masa  $m_2$ ). Las coordenadas cartesianas  $x_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  de las masas son, en términos de las coordenadas generalizadas:

$$x_1 = q_1, \quad x_2 = l_1 - q_1 + q_2, \quad x_3 = l_1 - q_1 + l_2 - q_2. \quad (112)$$

Las velocidades cartesianas son:

$$\dot{x}_1 = \dot{q}_1, \quad \dot{x}_2 = -\dot{q}_1 + \dot{q}_2, \quad \dot{x}_3 = -\dot{q}_1 - \dot{q}_2. \quad (113)$$

La energía cinética es

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{q}_1 - \dot{q}_2)^2 + \frac{1}{2}m_3(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2, \quad (114)$$

la energía potencial

$$U = -m_1gq_1 - m_2g(l_1 - q_1 + q_2) - m_3g(l_1 - q_1 + l_2 - q_2), \quad (115)$$

y el lagrangiano

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{q}_1 - \dot{q}_2)^2 + \frac{1}{2}m_3(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + m_1gq_1 + m_2g(l_1 - q_1 + q_2) + m_3g(l_1 - q_1 + l_2 - q_2). \quad (116)$$

Las ecuaciones de Lagrange son:

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) = (m_1 - m_2 - m_3)g - (m_1 + m_2 + m_3)\ddot{q}_1 + (m_2 - m_3)\ddot{q}_2 = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_2} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right) = (m_2 - m_3)g + (m_2 - m_3)\ddot{q}_1 - (m_2 + m_3)\ddot{q}_2 = 0. \quad (117)$$

De las ecuaciones

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2 + m_3)\ddot{q}_1 + (m_3 - m_2)\ddot{q}_2 &= (m_1 - m_2 - m_3)g, \\ (m_2 - m_3)\ddot{q}_1 - (m_2 + m_3)\ddot{q}_2 &= (m_3 - m_2)g, \end{aligned} \quad (118)$$

podemos obtener las aceleraciones  $\ddot{q}_1$  y  $\ddot{q}_2$ , que se integran trivialmente para dar las velocidades y coordenadas e función del tiempo (obviamente se obtiene un movimiento uniformemente acelerado).

## VII. LIGADURAS

Muy a menudo, como sabemos, nuestro sistema se encuentra sometido a ligaduras: una bola que rueda sobre una superficie, una masa que pende de un hilo y oscila, una cuenta que desliza a lo largo de un alambre con forma más o menos irregular. A veces estas ligaduras dependen del tiempo: por ejemplo, el alambre puede estar moviéndose en el espacio.

En mecánica de Newton se introducen fuerzas de ligadura, que son aquellas fuerzas que ejerce el agente externo de manera que el sistema obedezca a la ligadura. Por ejemplo, una masa que desliza por un plano inclinado se ve sometida a una fuerza normal al plano, que evita que aquella penetre en esta. Normalmente el módulo de estas fuerzas es desconocido, depende del movimiento del sistema, y hay que calcularlo a posteriori.

En mecánica de Lagrange tenemos dos posibilidades, de la misma manera que, en cálculo variacional, hay dos maneras de resolver los problemas de ligaduras.

- Si las ligaduras son *holónomas*, esto es, relacionan sólo las coordenadas generalizadas pero no las velocidades,

$$f_i(q_1, q_2, \dots; t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (119)$$

es en principio posible despejar  $M$  coordenadas en términos de las otras  $s = 3N - M$ , con lo cual sólo necesitamos  $s$  coordenadas generalizadas  $\{q_j\}$ ,  $j = 1, 2, \dots, s$ . Resolveríamos así las ecuaciones de Lagrange para esas  $s$  coordenadas,

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, s, \quad (120)$$

y a posteriori obtendríamos el resto de coordenadas usando las ecuaciones de ligadura. Aquí no aparecen multiplicadores de Lagrange.

- Si las ligaduras son holónomas pero no podemos despejar unas coordenadas en términos de las otras, las ligaduras no se van a poder incorporar en la definición de coordenadas generalizadas. Sin embargo, el método de los multiplicadores de Lagrange propio del cálculo variacional nos permite resolver el problema, al menos en principio, con la ventaja añadida de que vamos a poder obtener las ‘fuerzas de ligadura’. Escribimos unas ecuaciones dinámicas que incluyen multiplicadores de Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) + \sum_{i=1}^M \lambda_i(t) \frac{\partial f_i}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, s. \quad (121)$$

Para ver el significado físico del último término, vamos a suponer que las coordenadas generalizadas son cartesianas. Entonces tendremos  $L(\{q_j, \dot{q}_j\}) = T(\{\dot{q}_j\}) - U(\{q_j\})$ , y

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) + \sum_{i=1}^M \lambda_i(t) \frac{\partial f_i}{\partial q_j} &= -\frac{\partial U}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) + \sum_{i=1}^M \lambda_i(t) \frac{\partial f_i}{\partial q_j} \\ &= F_j - m\ddot{q}_j + \sum_{i=1}^M \lambda_i(t) \frac{\partial f_i}{\partial q_j} = 0. \end{aligned} \quad (122)$$

Nos queda pues la ecuación

$$m\ddot{q}_j = F_j + \sum_{i=1}^M \lambda_i(t) \frac{\partial f_i}{\partial q_j}. \quad (123)$$

Por tanto,

$$Q_j \equiv \sum_{i=1}^M \tilde{Q}_{ij}, \quad Q_{ij} \equiv \lambda_i(t) \frac{\partial f_i}{\partial q_j} \quad (124)$$

donde  $Q_j$  es la componente  $j$  de la fuerza de ligadura total, y  $Q_{ij}$  es la fuerza de ligadura  $i$  asociada a la coordenada cartesiana  $j$ . Para otras coordenadas generalizadas, no cartesianas, el significado de  $Q_{ij}$  es por tanto el de una *fuerza de ligadura generalizada*, necesaria para satisfacer

la ligadura. Este procedimiento es más complicado que el anterior, pero nos proporciona las fuerzas de ligadura, que puede ser interesante conocer.

Como ejemplo, consideremos un disco macizo, de radio  $R$  y masa  $M$  que rueda sin deslizar sobre un plano inclinado con ángulo de apertura  $\alpha$ , Fig. 9. Escogemos nuestro sistema de referencia en el punto superior, con los ejes  $x$  e  $y$  como se indica en la Fig. 9. Aquí hay dos grados de libertad: uno de traslación, y otro de rotación. Definamos nuestras coordenadas generalizadas como  $q_1 = x$  y  $q_2 = \theta$ , donde  $\theta$  es el ángulo que forma un punto escogido arbitrariamente sobre el borde del disco con el eje  $y$ . Ajustamos sus valores iniciales de manera que  $\theta = 0$  cuando  $x = 0$ . La ligadura es pues

$$f(x, \theta) = x - R\theta = 0. \quad (125)$$

Esta ligadura holónoma es muy sencilla y sí que permite despejar una coordenada en términos de la otra. Para ilustrar el procedimiento, vamos a seguir adelante como si no fuera posible. La energía cinética incluye términos de traslación del centro de masas y de rotación alrededor del centro de masas:

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2, \quad (126)$$

donde  $I = MR^2/2$  es el momento de inercia de un disco. La energía potencial es (poniendo el cero de energías potenciales en el punto superior)  $U = -Mgx \sin \alpha$ . El lagrangiano es:

$$L = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + Mgx \sin \alpha. \quad (127)$$

Las dos ecuaciones de Lagrange, incluyendo la ligadura, son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) + \lambda(t) \frac{\partial f}{\partial x} &= 0 \rightarrow Mg \sin \alpha - M\ddot{x} + \lambda = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) + \lambda(t) \frac{\partial f}{\partial \theta} &= 0 \rightarrow -\frac{1}{2}MR^2\ddot{\theta} - \lambda R = 0. \end{aligned} \quad (128)$$

Estas dos ecuaciones, junto con la ecuación de ligadura, nos permiten obtener las tres incógnitas,  $x(t)$ ,  $\theta(t)$  y  $\lambda(t)$ . Por ejemplo, derivando dos veces la ligadura,  $\ddot{\theta} = \ddot{x}/R$ , y sustituyendo en la segunda ecuación:

$$\frac{1}{2}MR^2 \left( \frac{\ddot{x}}{R} \right) + \lambda R = 0 \rightarrow \lambda = -\frac{1}{2}M\ddot{x}. \quad (129)$$

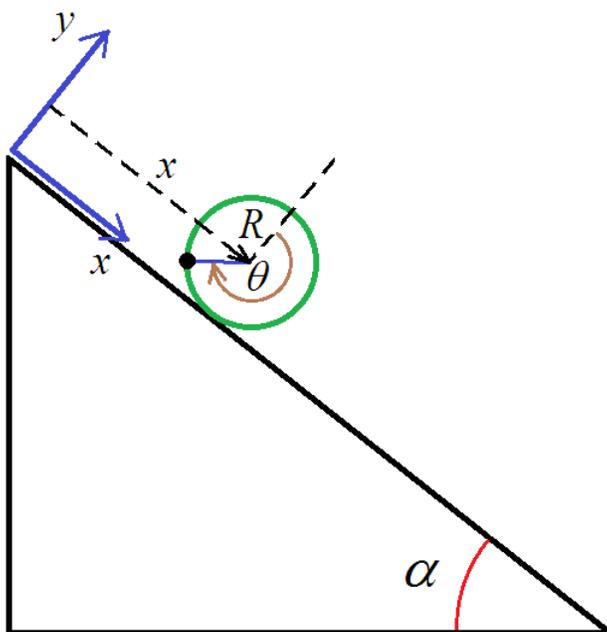


FIG. 9: Disco que rueda sin deslizar sobre un plano inclinado.

Ahora, sustituyendo en la primera ecuación:

$$Mg \sin \alpha - M\ddot{x} - \frac{1}{2}M\ddot{x} = 0 \rightarrow \ddot{x} = \frac{2}{3}g \sin \alpha. \quad (130)$$

De aquí obtenemos:

$$\lambda = -\frac{1}{3}Mg \sin \alpha, \quad \ddot{\theta} = \frac{2g}{3R} \sin \alpha. \quad (131)$$

Estas ecuaciones se integran fácilmente. Imponiendo las condiciones iniciales,  $t_0 = 0$ ,  $x_0 = 0$ ,  $\theta_0 = 0$ ,  $\dot{x}_0 = 0$  y  $\dot{\theta}_0 = 0$ , obtenemos:

$$x(t) = \frac{1}{3}gt^2 \sin \alpha, \quad \theta(t) = \frac{1}{3R}gt^2 \sin \alpha. \quad (132)$$

Nótese que el disco cae con una aceleración que es  $2/3$  la aceleración con la que caería el disco si deslizara (es decir, no hubiese rozamiento), que sería  $g \sin \alpha$  (si  $\alpha = 90^\circ$ , sería una caída libre, es decir, la aceleración de la gravedad). Si en lugar de un disco macizo tuviesemos un aro, el momento de inercia es  $I = MR^2$ , y se comprueba fácilmente que las aceleraciones cambian a  $\ddot{x} = \frac{g}{2} \sin \alpha$  y  $\ddot{\theta} = \frac{g}{2R} \sin \alpha$ .

Ahora podemos calcular las fuerzas de ligadura:

$$Q_x = \lambda \frac{\partial f}{\partial x} = \lambda = -\frac{1}{3}Mg \sin \alpha,$$

$$Q_\theta = \lambda \frac{\partial f}{\partial \theta} = -\lambda R = \frac{R}{3}Mg \sin \alpha. \quad (133)$$

Estas son las fuerzas que ejerce el plano sobre el disco de manera que se mantenga la ligadura.  $Q_x < 0$  porque la ligadura desacelera el movimiento a lo largo del plano con respecto a la situación sin ligadura (disco deslizando).  $Q_\theta > 0$  porque hace falta una fuerza que ejerza un momento que haga que el ángulo  $\theta$  aumente (el disco ruede) para mantener la ligadura (no deslizamiento).

En el ejemplo anterior, puesto que la ligadura es holónoma y muy simple, podemos también usar el primer procedimiento y despejar una de las coordenadas en términos de la otra. Por ejemplo,  $\theta = x/R$ , y el lagrangiano en función sólo de  $x$  y  $\dot{x}$  es:

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I \left( \frac{\dot{x}}{R} \right)^2 + Mgx \sin \alpha = \frac{3}{4}M\dot{x}^2 + Mgx \sin \alpha. \quad (134)$$

La (única) ecuación de Lagrange es:

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = Mg \sin \alpha - \frac{3}{2}M\ddot{x} = 0 \quad \rightarrow \quad \ddot{x} = \frac{2}{3}Mg \sin \alpha. \quad (135)$$

Llegamos a la misma ecuación, incluso más rápido, aunque no tenemos las fuerzas de ligadura.

- Una ligadura holónoma puede ser además *esclerónoma* cuando no aparece explícitamente el tiempo:

$$f_i(q_1, q_2, \dots) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (136)$$

Es por ejemplo la situación del ejercicio anterior. Si el tiempo aparece, la ligadura se llama *reónoma*.

- Las ligaduras *no holónomas* son más complicadas de tratar. Estas ligaduras son de la forma

$$f_i(\{q_j, \dot{q}_j\}; t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, M, \quad (137)$$

es decir, involucran al tiempo. Lo ideal es que la ligadura sea *integrable*, es decir, que se pueda transformar el holónoma. Por ejemplo, si la ligadura es

$$\sum_j A_j \dot{q}_j + B = 0, \quad (138)$$

y se cumple que existe una función  $h(\{q_j\}; t)$  tal que

$$A_j = \frac{\partial h}{\partial q_j}, \quad B = \frac{\partial h}{\partial t}, \quad (139)$$

Entonces

$$\sum_j A_j \dot{q}_j + B = \sum_j \frac{\partial h}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{dh}{dt} = 0 \rightarrow h(\{q_j\}; t) - c = 0, \quad (140)$$

donde  $c$  es una constante, y la ligadura se transforma en holónoma. Un ejemplo sencillo es el anterior del disco que rueda sobre un plano inclinado, cuya ligadura en realidad se escribe más apropiadamente en términos de velocidades: el disco rueda sin deslizar si la velocidad del punto de contacto del disco con el plano es nula. Esta velocidad es igual a la velocidad del centro de masas, que es  $\dot{x}$ , más la velocidad del punto con respecto al centro de masas, que es  $-R\dot{\theta}$  (con signo  $-$  porque va en la dirección negativa de las  $x$ ). La ligadura es entonces  $\dot{x} - R\dot{\theta} = 0$ , que es una ligadura no holónoma. Pero esta ligadura se puede integrar y transformar en holónoma:

$$f(x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}) = \dot{x} - R\dot{\theta} = \frac{d}{dt}(x - R\theta) = 0 \rightarrow x - R\theta = c. \quad (141)$$

La constante  $c$  se escoge ajustando los valores de  $y$  y  $\theta$  en el instante inicial (por ejemplo,  $y = 0$  cuando  $\theta = 0$ , lo cual nos da  $c = 0$ ).

## VIII. TEOREMA SOBRE LA ENERGÍA CINÉTICA

La energía cinética en coordenadas cartesianas es una forma cuadrática homogénea de las coordenadas:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \sum_i m_{\alpha} \dot{x}_{\alpha i}^2. \quad (142)$$

Vamos a ver que, en coordenadas generalizadas, tendremos una forma cuadrática general. De la relación  $x_{\alpha i} = x_{\alpha i}(\{q_j\}; t)$ :

$$\dot{x}_{\alpha i} = \sum_j \frac{\partial x_{\alpha i}}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial x_{\alpha i}}{\partial t}. \quad (143)$$

Elevando al cuadrado:

$$\dot{x}_{\alpha i}^2 = \sum_{kj} \frac{\partial x_{\alpha i}}{\partial q_j} \frac{\partial x_{\alpha i}}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k + 2 \sum_j \frac{\partial x_{\alpha i}}{\partial q_j} \frac{\partial x_{\alpha i}}{\partial t} \dot{q}_j + \left( \frac{\partial x_{\alpha i}}{\partial t} \right)^2, \quad (144)$$

de modo que

$$\begin{aligned}
T &= \sum_{\alpha j k} \frac{1}{2} m_\alpha \frac{\partial x_{\alpha i}}{\partial q_j} \frac{\partial x_{\alpha i}}{\partial q_k} \dot{q}_j \dot{q}_k + \sum_{\alpha i j} m_\alpha \frac{\partial x_{\alpha i}}{\partial q_j} \frac{\partial x_{\alpha i}}{\partial t} \dot{q}_j + \sum_{\alpha i} \frac{1}{2} m_\alpha \left( \frac{\partial x_{\alpha i}}{\partial t} \right)^2 \\
&= \sum_{j k} a_{j k} \dot{q}_j \dot{q}_k + \sum_j b_j \dot{q}_j + c,
\end{aligned} \tag{145}$$

donde

$$a_{j k} = a_{k j} \equiv \frac{1}{2} \sum_{\alpha i} m_\alpha \frac{\partial x_{\alpha i}}{\partial q_j} \frac{\partial x_{\alpha i}}{\partial q_k}, \quad b_j \equiv \sum_{\alpha i} m_\alpha \frac{\partial x_{\alpha i}}{\partial q_j} \frac{\partial x_{\alpha i}}{\partial t}, \quad c = \frac{1}{2} \sum_{\alpha i} m_\alpha \left( \frac{\partial x_{\alpha i}}{\partial t} \right)^2. \tag{146}$$

Vemos pues que la energía cinética es en general una forma cuadrática en las velocidades generalizadas, con término cuadrático, lineal e independiente. Obsérvese que, si las ligaduras son esclerónomas, la relación entre coordenadas cartesianas y generalizadas no va a incluir el tiempo,  $x_{\alpha i} = x_{\alpha i}(\{q_j\})$ , y

$$T = \sum_{j k} a_{j k} \dot{q}_j \dot{q}_k. \tag{147}$$

En este caso podemos obtener una relación importante. Derivando:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} = \sum_k a_{l k} \dot{q}_k + \sum_j a_{j l} \dot{q}_j, \tag{148}$$

de manera que

$$\sum_l \dot{q}_l \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} = \sum_{k l} a_{l k} \dot{q}_k \dot{q}_l + \sum_{k l} a_{j l} \dot{q}_j \dot{q}_l = 2 \sum_{k l} a_{l k} \dot{q}_k \dot{q}_l = 2T, \tag{149}$$

de donde

$$\boxed{\sum_l \dot{q}_l \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_l} = 2T} \tag{150}$$

Este resultado no es más que el teorema de Euler aplicado a la energía cinética. El teorema de Euler dice que, si  $f(y_1, y_2, \dots, y_N)$  es una función homogénea de grado  $n$ , es decir,

$$f(\lambda y_1, \lambda y_2, \dots, \lambda y_N) = \lambda^n f(y_1, y_2, \dots, y_N), \tag{151}$$

entonces

$$\sum_{i=1}^N y_i \frac{\partial f}{\partial y_i} = n f \tag{152}$$

ya que, derivando (151) con respecto a  $\lambda$  y sumando a todos los índices:

$$\sum_i y_i \frac{\partial f(\lambda y_1, \dots, \lambda y_N)}{\partial (\lambda y_i)} \Big|_{\lambda=1} = n \lambda^{n-1} f \Big|_{\lambda=1} \tag{153}$$

y haciendo  $\lambda = 1$  se obtiene (152).

## IX. LEYES DE CONSERVACIÓN Y SIMETRÍAS

Vamos a ver que las simetrías de un sistema están relacionadas con invariancias del lagrangiano, que en último término dan lugar a leyes de conservación. La búsqueda de leyes de conservación es una herramienta muy utilizada en mecánica.

- **Invariancia temporal.** Como ya hemos visto, en general un lagrangiano puede depender explícitamente del tiempo,  $L = L(\{q_j, \dot{q}_j\}; t)$ . Supongamos que el lagrangiano *es invariante frente a traslaciones temporales*. Esto quiere decir que podemos trasladar el origen de tiempos una cantidad arbitraria,  $t_0$ , y el movimiento de nuestro sistema es el mismo. Un ejemplo puede ser el hacer un experimento hoy, o desplazarlo en el tiempo a mañana. Si las condiciones ambientales no cambian, el resultado ha de ser el mismo, y el lagrangiano también. En términos matemáticos, diríamos que

$$L(\{q_j, \dot{q}_j\}; t) = L(\{q_j, \dot{q}_j\}; t + t_0) \quad \rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial t} = 0. \quad (154)$$

(observemos que  $L$  dependerá del tiempo, pero implícitamente, a través de las coordenadas y velocidades generalizadas). Veamos las consecuencias de esta invariancia temporal. La derivada total será:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_j \frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial t} = \sum_j \frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j. \quad (155)$$

Podemos transformar el primer término usando la ecuación de Lagrange:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_j \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \dot{q}_j + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j = \sum_j \frac{d}{dt} \left( \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right). \quad (156)$$

De aquí obtenemos:

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L \right) = 0 \quad \rightarrow \quad H \equiv \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L = \text{const.} \quad (157)$$

Por tanto, la invariancia temporal implica la existencia de una constante de movimiento o ley de conservación, la del llamado *hamiltoniano*,  $H$ .

A veces (¡pero no siempre!) el hamiltoniano tiene un significado físico muy claro. Supongamos que  $U$  es sólo una función de las coordenadas generalizadas,  $U = U(\{q_j\})$  (y no del tiempo ni de las velocidades generalizadas). Entonces

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \quad (158)$$

y

$$H = \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L = \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - T + U. \quad (159)$$

Como la condición  $U = U(\{q_j\})$  implica que las funciones  $x_{\alpha i} = x_{\alpha i}(\{q_j\})$  no dependen del tiempo, se cumplen las condiciones del teorema de Euler (150), y

$$H = 2T - T + U = T + U = E, \quad (160)$$

donde  $E$  es la energía. Por tanto, el hamiltoniano es la energía si la transformación entre cartesianas y generalizadas no depende del tiempo, y si además la energía potencial no depende de las velocidades.

En un problema dado hay que analizar cuidadosamente si  $H$  es la energía o no y cuál de ellas se conserva. Existen varios casos:

- Si tenemos un sistema conservativo en el que la transformación entre cartesianas y generalizadas sí depende del tiempo, y  $L$  depende del tiempo, entonces  $H \neq E$  no se conserva, pero  $E$  sí, al ser el sistema conservativo.
- Si tenemos un sistema conservativo en el que la transformación entre cartesianas y generalizadas sí depende del tiempo, pero  $L$  no depende del tiempo, entonces  $H \neq E$  pero se conservan las dos cantidades.
- Si tenemos un sistema conservativo en el que la transformación entre cartesianas y generalizadas no depende del tiempo, y  $U$  no depende de las velocidades, entonces  $H = E$  y se conserva.
- Si tenemos un sistema no conservativo, entonces  $E$  no se conserva, pero si  $L$  no depende del tiempo  $H \neq E$  sí se conserva.

En cualquier caso, si  $H$  es una constante de movimiento (sea la energía o no), podemos utilizar el método del potencial efectivo para obtener la solución del problema o bien para discutir cualitativamente el tipo de soluciones. Para ello, como siempre, hay que identificar un término definido positivo, proporcional a una componente de la velocidad al cuadrado, que haga de energía cinética (efectiva); el resto será la energía potencial efectiva.

- **Invariancia con respecto a  $q_k$ .** Supongamos que

$$L(q_1, \dots, q_k, \dots, q_s; t) = L(q_1, \dots, q_k + c, \dots, q_s; t) \quad \rightarrow \quad \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \quad (161)$$

donde  $c$  es una constante. Es decir, supongamos que  $L$  es invariante frente a traslaciones de una coordenada generalizada  $q_k$  determinada o, lo que es lo mismo, que  $L$  no depende explícitamente de esa variable); tal coordenada  $q_k$  se dice *ignorable*. Entonces, la ecuación de Lagrange para  $q_k$  implica:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) = 0 \quad \rightarrow \quad p_k \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \text{const.} \quad (162)$$

$p_k$  es el llamado *momento generalizado*, y en este supuesto es constante. Nuevamente, obtenemos una ley de conservación a partir de una invariancia del sistema. La ley de conservación da lugar a una ecuación muy útil para intentar resolver el movimiento:

$$p_k = p_k(q_1, \dots, q_{k-1}, q_{k+1}, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s; t) = \text{const.} \quad (163)$$

Estas ecuaciones son *integrales primeras* del movimiento, ya que sólo involucran derivadas de orden uno. Dos casos particulares importantes son:

- $q_k$  es una coordenada cartesiana o, en general, una distancia. Entonces  $p_k$  es una componente del momento lineal. Podemos decir que, cuando el sistema es invariante frente a traslaciones en una dirección (*homogeneidad espacial*), la correspondiente componente del momento lineal se conserva.
- $q_k$  es una coordenada angular. Entonces  $p_k$  es la componente del momento angular a lo largo del eje asociado a la coordenada, y podemos decir que, cuando el sistema es invariante frente a rotaciones alrededor de un eje (*isotropía*), la correspondiente componente del momento angular se conserva.

Existe una formulación general que unifica estos resultados, que se basa en el llamado *teorema de Noether*. Este teorema y sus consecuencias se estudian en cursos de mecánica y teoría de campos más avanzados.

## X. ECUACIONES DE LAGRANGE DESDE LA MECÁNICA NEWTONIANA

A partir de la mecánica newtoniana se pueden obtener las ecuaciones de Lagrange sin ampliar los axiomas de ésta. Consideremos un sistema de  $N$  partículas sometido a ciertas ligaduras que restringen los movimientos posibles de las partículas. Supongamos que el sistema se encuentra en equilibrio, de modo que las fuerzas sobre las partículas son nulas,  $\mathbf{F}_i = \mathbf{0}$ . Denotemos por  $\delta \mathbf{r}_i$  un pequeño *desplazamiento virtual* de la partícula  $i$ , es decir, un desplazamiento posible –compatible con las ligaduras–, pero que no

necesariamente se da. Obviamente se cumple la ecuación  $\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$ . Imaginemos ahora el problema dinámico, gobernado por la ecuación de Newton,  $\mathbf{F}_i = \dot{\mathbf{p}}_i$ . El problema dinámico lo podemos considerar como un problema estático donde la fuerza es  $\mathbf{F}_i - \dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{0}$ . Entonces se cumple  $\sum_i (\mathbf{F}_i - \dot{\mathbf{p}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0$ . Dividiendo las fuerzas en fuerzas externas  $\mathbf{F}_i$  y fuerzas de ligadura  $\mathbf{f}_i$ :

$$\sum_i (\mathbf{F}_i + \mathbf{f}_i - \dot{\mathbf{p}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i + \sum_i \mathbf{f}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i - \sum_i \dot{\mathbf{p}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0. \quad (164)$$

Como las fuerzas de ligadura son ortogonales a los desplazamientos virtuales:

$$\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i - \sum_i \dot{\mathbf{p}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (\text{Principio de D'Alembert}) \quad (165)$$

Aquí los desplazamientos virtuales  $\delta \mathbf{r}_i$  son a tiempo fijo (son sólo posibles desplazamientos; luego habrá que ver cuáles son los que se dan en la realidad). Transformemos ahora a desplazamientos virtuales en las coordenadas generalizadas. Como  $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(\{q_j\}; t)$ , donde  $\{q_j\}$  son coordenadas generalizadas independientes,  $j = 1, 2, \dots, s$ , tenemos:

$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_j \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j, \quad (166)$$

y

$$\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i - \sum_i \dot{\mathbf{p}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{ij} \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j - \sum_{ij} m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = 0. \quad (167)$$

El segundo término (sin la suma) se puede escribir:

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left( m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) - m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right). \quad (168)$$

Se puede demostrar que

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j}, \quad (\text{A})$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j}. \quad (\text{B})$$

Para demostrar (A), calculamos ambos miembros por separado y vemos que son iguales. Tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) &= \sum_k \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_k \partial q_j} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_j \partial t}, \\ \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j} &= \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \sum_k \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right) = \sum_k \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_k \partial q_j} \dot{q}_k + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_j \partial t}, \end{aligned} \quad (170)$$

luego (A) es cierta. Para demostrar (B), calculamos el término derecho y vemos que es igual al izquierdo:

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( \sum_k \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right) = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}. \quad (171)$$

Entonces, llamando fuerza generalizada a

$$Q_j = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}, \quad (172)$$

y usando los anteriores resultados, tenemos que la ecuación (167) se puede poner como:

$$\sum_j \left\{ Q_j - \sum_i \left[ \frac{d}{dt} \left( m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j} \right] \right\} \delta q_j = 0. \quad (173)$$

Ahora:

$$\begin{aligned} \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( \frac{1}{2} \sum_i m_i |\dot{\mathbf{r}}_i|^2 \right) = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}, \\ \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j} &= \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \frac{1}{2} \sum_i m_i |\dot{\mathbf{r}}_i|^2 \right) = \frac{\partial T}{\partial q_j}. \end{aligned} \quad (174)$$

luego llegamos a la ecuación:

$$\sum_j \left\{ Q_j - \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right] \right\} \delta q_j = 0. \quad (175)$$

Como los desplazamientos virtuales  $\delta q_j$  son arbitrarios e independientes, llegamos a las ecuaciones de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad j = 1, 2, \dots, s. \quad (176)$$

Obsérvese que aquí no hemos hecho mención a que las fuerzas sean conservativas o no. Por tanto, estas ecuaciones son más generales que las (88), que se obtuvieron de las (75), las cuales suponen que existe una energía potencial  $U$  (y, por tanto, que el sistema es conservativo). Obviamente, a partir de (176), se pueden recuperar las ecuaciones de Lagrange (75) para sistemas conservativos. Para ello, partimos de las fuerzas y de la suposición de que éstas son conservativas,  $\mathbf{F}_i = -\nabla_{\mathbf{r}_i} U$ . Entonces las fuerzas generalizadas son

$$Q_j = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = - \sum_i \nabla_{\mathbf{r}_i} U \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = - \frac{\partial U}{\partial q_j}. \quad (177)$$

Si la energía potencial  $U$  no depende de las  $\{\dot{q}_j\}$ , entonces

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = - \frac{\partial U}{\partial q_j} \quad (178)$$

de donde se obtiene

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad (179)$$

que son las ecuaciones de Lagrange.

Las ecuaciones de Lagrange generales (176), cuando las fuerzas no son conservativas, se pueden obtener también de un principio extremal, que es el principio de Hamilton para sistemas generales:

$$\delta S[\{q_j\}] = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt (T + V) = 0, \quad (180)$$

donde  $V$  es el *virial*:

$$V = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i. \quad (181)$$

La demostración de que (180) conduce a (176) es sencilla. Primero escribimos

$$\begin{aligned} \delta S &= \delta \int_{t_1}^{t_2} dt T + \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt T + \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i \\ &= \delta \int_{t_1}^{t_2} dt T + \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_j Q_j \delta q_j. \end{aligned} \quad (182)$$

El último paso sale de (172):

$$\sum_j Q_j \delta q_j = \sum_{ij} \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \sum_j \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i. \quad (183)$$

Ahora, como  $T = T(\{q_j, \dot{q}_j\}; t)$ , podemos aplicar la misma técnica utilizada en el caso conservativo a la variación del primer término de (182):

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt T = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_j \left[ \frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) \right] \delta q_j. \quad (184)$$

Sumando,

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \sum_j \left[ \frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) + Q_j \right] \delta q_j = 0 \quad (185)$$

y teniendo en cuenta que las  $\delta q_j$  son independientes, obtenemos las ecuaciones de Lagrange para sistemas generales (176).

## XI. MECÁNICA HAMILTONIANA

Se trata de otra reformulación de la mecánica newtoniana que nos da otro punto de vista. Es un punto de partida imprescindible para formulaciones más teóricas de la mecánica y en aplicaciones como la mecánica celeste o la mecánica cuántica.

La mecánica lagrangiana se basa en una función, el lagrangiano, que es función de coordenadas  $\{q_j\}$  y velocidades  $\{\dot{q}_j\}$  generalizadas,  $L = L(\{q_j, \dot{q}_j\}; t)$ . La mecánica hamiltoniana consiste en utilizar como variables  $\{q_j, p_j\}$ , es decir, en sustituir las velocidades por los momentos generalizados. Vamos a ver que se requiere el concurso de otra función, distinta del lagrangiano, para obtener las ecuaciones de movimiento, y que el formalismo es mucho más simétrico.

Partimos del hamiltoniano, definido en mecánica lagrangiana como una posible constante del movimiento. Aunque no sea constante para un cierto problema, es una función que se puede definir de todas maneras. Observemos que, en su definición, contiene los momentos generalizados:

$$H = \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L = \sum_j \dot{q}_j p_j - L. \quad (186)$$

Como  $p_j = \partial L / \partial \dot{q}_j$  y  $L$  es función de  $\{q_j, \dot{q}_j\}$ , los momentos generalizados serán también función de coordenadas y velocidades generalizados, y también el hamiltoniano. Vamos a transformar éste para que sea función de  $\{q_j, p_j\}$ . Para ello, despejamos las velocidades generalizadas (si podemos [1]):

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = p_j(\{q_j, \dot{q}_j\}; t) \quad \rightarrow \quad \dot{q}_j = \dot{q}_j(\{q_j, p_j\}; t). \quad (187)$$

Sustituyendo en (186):

$$H(\{q_j, p_j\}; t) = \sum_j \dot{q}_j p_j - L = \sum_j \dot{q}_j(\{q_j, p_j\}; t) p_j - L(\{q_j, \dot{q}_j(\{q_k, p_k\}; t)\}; t). \quad (188)$$

De esta manera, tenemos expresado  $H$  como función de lo que vamos a ver son sus coordenadas naturales,  $\{q_j, p_j\}$ . La transformación, esquemáticamente, es:

$$L = L(\{q_j, \dot{q}_j\}; t) \quad \rightarrow \quad H = H(\{q_j, p_j\}; t) \quad (189)$$

Es un ejemplo de *transformación de Legendre*. La transformación de Legendre se usa a menudo en física, por ejemplo, en mecánica en el contexto que estamos tratando, o en termodinámica con las transformaciones entre diferentes energías libres. Se usa cuando queremos transformar la dependencia de una función  $y = f(x)$  de su variable  $x$  a otra variable que sea la derivada de la función,  $p = f'(x)$ . Para no perder información, si queremos reconstruir toda la función  $f(x)$  a partir de  $p$  (que es el valor

de la tangente en cada punto  $x$ ), necesitamos también saber en qué punto corta al eje  $y$  cada línea tangente (de manera que tengamos toda la familia de líneas envolventes de la función  $y = f(x)$ , lo cual es equivalente a conocer la función). Ver Fig. 10. Sea este punto el  $(0, g)$ . Entonces se cumple  $y = g + px$ , donde  $g = y - px$  es el corte con el eje  $y$ . Por tanto, la función  $f(x)$  es equivalente a la función  $g(p) = f(x) - px$ : para pasar de una función  $f(x)$  a otra  $g(p)$  en la que  $p = f'(x)$ , sin perder información, sólo tenemos que restar el producto  $px$  (nueva variable por antigua variable) de la función original. Este es el caso en (188): para pasar de  $L$ , que es función de las  $\{\dot{q}_j\}$ , a  $H$  que es función de las  $\{p_j\}$ , sólo tenemos que restar a  $L$  los productos  $\dot{q}_j p_j$  (es tradicional cambiar el signo de la transformación de manera que  $H$  coincida con la energía en los casos en los que debe ser la energía).

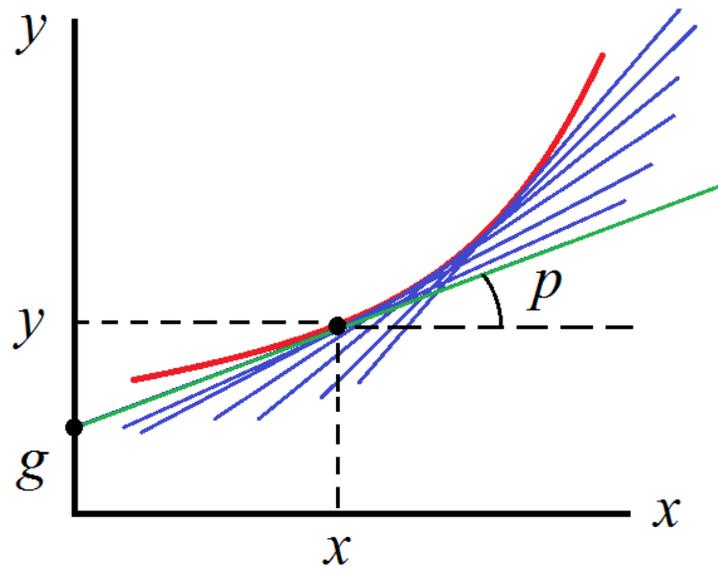


FIG. 10: Función  $y = f(x)$  (en rojo) y familia de envolventes a esta función (líneas rectas tangentes, en azul, salvo una dibujada en verde para señalar sus valores  $p$  y  $g$  asociados). Es equivalente especificar todos los puntos  $(x, y)$  de la curva a especificar los valores  $(g, p)$  de todas las líneas tangentes ( $g$  es el corte de la línea con el eje  $y$  y  $p$  la pendiente de la línea tangente).

Vamos a obtener las ecuaciones de movimiento que satisfacen las coordenadas y los momentos generalizados. Para ello, calculemos la diferencial total de  $H$  con respecto al tiempo, atendiendo a la dependencia de  $H$  en sus variables naturales:

$$dH = \sum_j \left( \frac{\partial H}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial H}{\partial p_j} dp_j \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt. \quad (190)$$

Pero también podemos calcular esta diferencial usando (188):

$$\begin{aligned} dH &= \sum_j (p_j d\dot{q}_j + \dot{q}_j dp_j) - \sum_j \left( \frac{\partial L}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} d\dot{q}_j \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt \\ &= \sum_j (p_j d\dot{q}_j + \dot{q}_j dp_j) - \sum_j (\dot{p}_j dq_j + p_j d\dot{q}_j) - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \end{aligned} \quad (191)$$

En el último paso hemos hecho uso de la ecuación de Lagrange,  $\partial L/\partial q_j = \dot{p}_j$ , y de la definición de momento generalizado  $p_j = \partial L/\partial \dot{q}_j$ . Simplificando e igualando con la expresión (190):

$$\sum_j \left( \frac{\partial H}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial H}{\partial p_j} dp_j \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt = \sum_j (\dot{q}_j dp_j - \dot{p}_j dq_j) - \frac{\partial L}{\partial t} dt \quad (192)$$

Identificando los coeficientes de los diferenciales:

$$\boxed{\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}, \quad j = 1, 2, \dots, s.} \quad (193)$$

junto con  $\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$ . Las ecuaciones anteriores se llaman *ecuaciones de Hamilton* ó *ecuaciones canónicas*, y son las ecuaciones dinámicas en mecánica hamiltoniana. Se trata de un conjunto de  $2s$  ecuaciones de primer orden, en contraposición a las ecuaciones de Lagrange, que son  $s$  ecuaciones de segundo orden. Las  $2s$  constantes arbitrarias que se obtienen al integrar las ecuaciones de Hamilton son todas las coordenadas y momentos,  $\{q_{j0}, p_{j0}\}$ , del sistema en un instante inicial (a comparar con las  $2s$  constantes arbitrarias de las ecuaciones de Lagrange, que son las coordenadas y velocidades  $\{q_{j0}, \dot{q}_{j0}\}$  en un instante inicial). Las variables  $(q_j, p_j)$  se dice que son *variables canónicas*, y juegan un papel muy simétrico en las ecuaciones (193), al contrario que las variables  $(q_j, \dot{q}_j)$  en las ecuaciones de Lagrange.

Obsérvese que, si usamos las ecuaciones de Hamilton en (190), tenemos:

$$dH = \sum_j \left( \frac{\partial H}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial H}{\partial p_j} dp_j \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt = \sum_j (-\dot{p}_j dq_j + \dot{q}_j dp_j) + \frac{\partial H}{\partial t} dt = \frac{\partial H}{\partial t} dt, \quad (194)$$

de manera que las dos derivadas del hamiltoniano, parcial y total, coinciden:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (195)$$

Por tanto, si  $H$  no depende explícitamente del tiempo, se conserva en el tiempo,  $H = \text{const.}$  (esto ya lo sabemos de la mecánica lagrangiana, ya que  $H$  se conserva si  $\partial L/\partial t = 0$ , y acabamos de obtener que  $\partial H/\partial t = -\partial L/\partial t$ ).

Si en un problema dado decidimos utilizar mecánica hamiltoniana, hacemos lo siguiente:

- Identificamos las coordenadas generalizadas convenientes,  $\{q_j\}$ ,  $j = 1, 2, \dots, s$  (donde las posibles ligaduras ya están incorporadas en la definición de las coordenadas generalizadas).
- Construimos el lagrangiano  $L = T - U$  de la manera usual.
- Calculamos los momentos generalizados  $p_j = \partial L / \partial \dot{q}_j$ .
- Despejamos las velocidades generalizadas en términos de las coordenadas y momentos generalizados,  $\dot{q}_j = \dot{q}_j(\{q_j, p_j\}; t)$ .
- Construimos el hamiltoniano  $H = \sum_j p_j \dot{q}_j - L$ , *sustituyendo las velocidades generalizadas en favor de los momentos generalizados* (ya que éstos últimos son, junto con las coordenadas generalizadas, las variables naturales de  $H$ ).
- Escribimos las ecuaciones canónicas (¡y las intentamos resolver!).

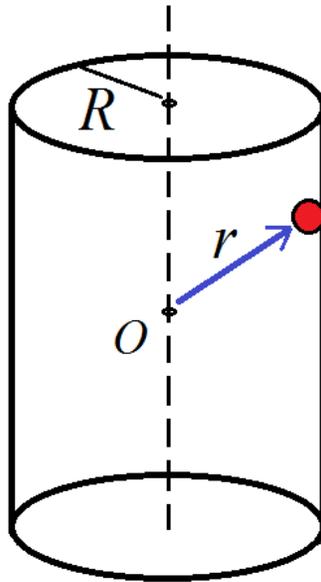


FIG. 11: Partícula que se mueve por la superficie de un cilindro de radio  $R$ , sometida únicamente a una fuerza armónica central proporcional al vector de posición  $\mathbf{r}$ .

Veamos un ejemplo. Tenemos una partícula de masa  $m$  que se mueve sobre la superficie de un cilindro, dado por la ecuación  $x^2 + y^2 = \rho^2 = R^2$ , y que está sometido a una fuerza central armónica  $\mathbf{F} = -k\mathbf{r}$ , Fig. 11. Usamos coordenadas cilíndricas, incorporando la ligadura  $\rho = R$ , con lo cual las coordenadas generalizadas van a ser dos,  $q_1 = \varphi$  y  $q_2 = z$ . Para obtener la energía potencial  $U(\mathbf{r})$  utilizamos

coordenadas esféricas. El gradiente es:

$$\nabla_{\mathbf{r}}U = \frac{\partial U}{\partial r}\hat{\mathbf{e}}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\hat{\mathbf{e}}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\hat{\mathbf{e}}_\varphi = kr\hat{\mathbf{e}}_r. \quad (196)$$

Identificando componentes:

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi}\hat{\mathbf{e}}_\varphi = 0 \quad \rightarrow \quad U = U(r, \theta),$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta}\hat{\mathbf{e}}_\theta = 0 \quad \rightarrow \quad U = U(r),$$

$$\frac{\partial U}{\partial r} = kr \quad \rightarrow \quad U(r) = k \int_0^r dr' r' = \frac{1}{2}kr^2 = \frac{1}{2}k(R^2 + z^2), \quad (197)$$

donde hemos tomado el origen de energía potencial en  $r = 0$ . Las coordenadas y velocidades cartesianas son

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi = R \cos \varphi, & y &= \rho \sin \varphi = R \sin \varphi, & z &= z \\ \dot{x} &= -R\dot{\varphi} \sin \varphi, & \dot{y} &= R\dot{\varphi} \cos \varphi, & \dot{z} &= \dot{z}, \end{aligned} \quad (198)$$

y el lagrangiano:

$$\begin{aligned} L = T - U &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2}k(R^2 + z^2) \\ &= \frac{1}{2}m(R^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2}k(R^2 + z^2). \end{aligned} \quad (199)$$

Los momentos generalizados son:

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mR^2\dot{\varphi}, \quad p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}. \quad (200)$$

Invirtiendo:

$$\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mR^2}, \quad \dot{z} = \frac{p_z}{m}. \quad (201)$$

Ahora el hamiltoniano es:

$$\begin{aligned} H &= \dot{\varphi}p_\varphi + \dot{z}p_z - L = \frac{p_\varphi^2}{mR^2} + \frac{p_z^2}{m} - \frac{1}{2}m \left[ R^2 \left( \frac{p_\varphi}{mR^2} \right)^2 + \left( \frac{p_z}{m} \right)^2 \right] + \frac{1}{2}k(R^2 + z^2) \\ &= \frac{p_\varphi^2}{2mR^2} + \frac{p_z^2}{2m} + \frac{1}{2}k(R^2 + z^2). \end{aligned} \quad (202)$$

Como la transformación entre coordenadas cartesianas y generalizadas no depende del tiempo, y además  $L$  tampoco, sabemos que  $H = E = T + U = \text{const.}$  [se puede comprobar directamente que  $H = T + U$  cambiando el signo  $-$  por  $+$  en la ecuación (199) para obtener  $T + U$ , y comparando con la ecuación (202)].

Las ecuaciones de Hamilton son:

$$\dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0 \quad (1) \quad \dot{p}_z = -\frac{\partial H}{\partial z} = -kz \quad (3) \quad (203)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{mR^2} \quad (2) \quad \dot{z} = \frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{p_z}{m} \quad (4)$$

La ecuación (1) implica  $p_\varphi = mR^2\dot{\varphi} = \text{const.}$  (que es la componente del momento angular a lo largo del eje  $z$ ). Por tanto, la coordenada azimutal varía linealmente en el tiempo,  $\varphi(t) = p_\varphi t/mR^2 + c$ , donde  $c$  es una constante que hay que ajustar con las condiciones iniciales. De (3) y (4) obtenemos

$$\ddot{z} = \frac{\dot{p}_z}{m} = -\frac{k}{m}z \quad \rightarrow \quad \ddot{z} + \omega_0^2 z = 0, \quad (204)$$

donde  $\omega = \sqrt{k/m}$  es la frecuencia de oscilación en el movimiento en  $z$  (que es armónico).

¿Cuándo utilizar la mecánica hamiltoniana frente a la mecánica lagrangiana? Cuando hay ligaduras la mecánica lagrangiana conduce a las ecuaciones dinámicas de manera más directa. Pero la mecánica hamiltoniana es a veces más conveniente, ya que:

- Las ecuaciones dinámicas son más simétricas que en mecánica lagrangiana, ya que los papeles de las dos variables naturales de  $H$  son casi simétricos.
- La estructura de la mecánica queda más explícita, lo cual permite desarrollos teóricos más avanzados y elegantes (por ejemplo, transformaciones canónicas y de simetría).
- Cuando hay perturbaciones, es un procedimiento más fácil de usar (por ejemplo en mecánica celeste).
- Da un acceso directo a la mecánica cuántica.

Por último, consideremos el importante caso en el que existen constantes de movimiento. En mecánica hamiltoniana, las coordenadas que no aparecen explícitamente en el hamiltoniano se llaman *coordenadas cíclicas*. Si  $q_j$  es cíclica en  $H$ , también lo es en  $L$  (en cuyo caso se llama ignorable). Sin embargo, en este último caso, la velocidad generalizada correspondiente,  $\dot{q}_j$ , sigue apareciendo en  $L$ :

$$L = L(q_1, q_2, \dots, q_{j-1}, q_{j+1}, \dots, q_s; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_{j-1}, \dot{q}_j, \dot{q}_{j+1}, \dots, \dot{q}_s; t), \quad (205)$$

y nos quedan  $s - 1$  ecuaciones de segundo orden más una de primero (la que expresa la constancia de  $p_j = \partial L / \partial \dot{q}_j$ ). En total,  $2(s - 1) + 1 = 2s - 1$  órdenes diferenciales. En el caso hamiltoniano, si  $q_j$  es cíclica, entonces

$$\dot{p}_j = 0 \quad \rightarrow \quad p_j = \omega_j = \text{const.},$$

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial \alpha} \equiv \omega_j(q_1, q_2, \dots, q_{j-1}, q_{j+1}, \dots, q_s; p_1, p_2, \dots, p_{j-1}, \alpha, p_{j+1}, \dots, p_s; t). \quad (206)$$

El asunto es que las otras coordenadas y momentos generalizados *no se ven afectados por la coordenada  $q_j$  ni por su momento  $\alpha$ , ya que la primera no aparece en el resto de ecuaciones, y la segunda sí aparece pero es una constante*. Es como si hubieramos reducido el número de grados de libertad en uno. Por tanto, podemos obtener el movimiento en las otras  $2s - 2$  coordenadas (es decir, resolver las otras  $2s - 2$  ecuaciones) y, posteriormente, obtener el movimiento en  $q_j$  por cuadratura [es decir, integrando 206]:

$$q_j(t) = \int dt' \omega_j(q_1, q_2, \dots, q_{j-1}, q_{j+1}, \dots, q_s; p_1, p_2, \dots, p_{j-1}, \alpha, p_{j+1}, \dots, p_s; t'). \quad (207)$$

En resumen, la formulación hamiltoniana es muy ventajosa cuando existen coordenadas cíclicas. De hecho, la llamada *teoría de Hamilton-Jacobi* permite obtener conjuntos de coordenadas cíclicas y, por tanto, constantes de movimiento. En principio, es posible encontrar sistemas de coordenadas generalizadas en los que todas las coordenadas son cíclicas. Si esto fuera posible, el problema se reduciría a  $s$  cuadraturas, ya que todos los momentos serían constantes,  $p_j = \omega_j = \text{const.}$ , y las coordenadas estarían dadas por funciones lineales en el tiempo:

$$q_j(t) = \int dt \omega_j = \omega_j t + \beta_j, \quad (208)$$

donde  $\beta_j$  son constantes.

## Appendix A: Análisis del péndulo simple acelerado mediante mecánica newtoniana

En el sistema de referencia no inercial con origen en  $O'$ , la ecuación de movimiento es

$$m\ddot{\mathbf{r}}' + m\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{F}, \quad (\text{A1})$$

donde  $\mathbf{R}$  es la posición del origen  $O'$  (no inercial) con respecto a  $O$  (inercial). Como  $\mathbf{R}(t) = \frac{1}{2}at^2\hat{\mathbf{e}}_x$ , tenemos  $\ddot{\mathbf{R}} = a\hat{\mathbf{e}}_x$ . La fuerza sobre la masa es

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_g + \mathbf{T} = -mg\hat{\mathbf{e}}_y - T\hat{\mathbf{e}}_\rho, \quad (\text{A2})$$

donde  $\mathbf{T}$  es la tensión de la cuerda. La ecuación de Newton, en polares, es

$$\begin{aligned} m(-l\dot{\theta}^2)\hat{\mathbf{e}}_\rho + ml\ddot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_\varphi &= -ma\hat{\mathbf{e}}_x - mg\hat{\mathbf{e}}_y - T\hat{\mathbf{e}}_\rho \\ &= -ma(\sin\theta\hat{\mathbf{e}}_\rho + \cos\theta\hat{\mathbf{e}}_\varphi) - mg(-\cos\theta\hat{\mathbf{e}}_\rho + \sin\theta\hat{\mathbf{e}}_\varphi) - T\hat{\mathbf{e}}_\rho \end{aligned} \quad (\text{A3})$$

(donde hemos tenido en cuenta que  $\dot{\rho} = 0$ ,  $\ddot{\rho} = 0$  y  $\varphi = \theta + \frac{3\pi}{4}$ ) y, en componentes

$$\begin{cases} -ml\dot{\theta}^2 = -ma\sin\theta + mg\cos\theta - T \\ ml\ddot{\theta} = -ma\cos\theta - mg\sin\theta \end{cases} \quad (\text{A4})$$

La segunda ecuación es la obtenida mediante mecánica lagrangiana. Una vez resuelta, podemos obtener la tensión  $T$  a partir de la primera. Esta primera ecuación se podría obtener en mecánica lagrangiana utilizando el método de ligaduras.

---

[1] Esto es posible si el determinante de la transformación es distinto de cero, es decir,  $\det\left(\frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}_j}\right) \neq 0$ .