

# Mecánica Clásica

Prof. Cayetano Di Bartolo

Departamento de Física  
Universidad Simón Bolívar

Esta guía está basada en los manuscritos que elaboré para los cursos de Mecánica que dicté entre los años 2000 y 2002 en la Universidad Simón Bolívar. La guía todavía requiere de modificaciones y correcciones, y es mi esperanza que en algún momento se convierta en un libro. Si el lector desea hacerme alguna observación puede escribirme a la dirección [dibarto@usb.ve](mailto:dibarto@usb.ve)

## AGRADECIMIENTOS

El libro se está realizando con la magnífica colaboración de mi esposa Jacqueline Geille, quién contribuye en todos los aspectos de su elaboración. También agradezco al Profesor Lorenzo Leal, de la Universidad Central de Venezuela, que muy amablemente me facilitó sus notas para el curso de Mecánica.

Abril de 2003

## Temas adicionales en el formalismo Lagrangeano

En este capítulo desarrollaremos varios temas que se quedaron en el tintero cuando estudiamos las ecuaciones de Euler-Lagrange. Ampliaremos el formalismo de Lagrange para incluir fuerzas disipativas, fuerzas reactivas y cierto tipo de vínculos no holónomos dependientes de las velocidades. Veremos como se comporta el formalismo frente a cambios generales de coordenadas generalizadas y estudiaremos la relación entre las simetrías del Lagrangeano y las cantidades conservadas. Al final introduciremos un principio variacional del cual es posible deducir el formalismo de Lagrange.

### 6.1 Fuerzas no conservativas.

En el capítulo 4 se obtuvieron ecuaciones de Euler-Lagrange para sistemas en los cuales todas las fuerzas activas eran conservativas. A continuación estudiaremos que forma adquieren las ecuaciones cuando fuerzas activas no conservativas actúan sobre el sistema.

Consideremos un sistema sobre el cual actúan fuerzas activas no conservativas  $\tilde{F}^{nc}$  y fuerzas activas conservativas provenientes del potencial  $V(\tilde{X})$ . La fuerza neta activa que actúa sobre el sistema es

$$\tilde{F} = -\tilde{\nabla}V + \tilde{F}^{nc}. \quad (6.1)$$

De (4.3) obtenemos que la fuerza generalizada es

$$\begin{aligned} \Theta_b &\equiv \tilde{F} \cdot \frac{\partial \tilde{X}}{\partial q_b} = -\tilde{\nabla}V \cdot \frac{\partial \tilde{X}}{\partial q_b} + \tilde{F}^{nc} \cdot \frac{\partial \tilde{X}}{\partial q_b} \\ &= -\frac{\partial V}{\partial q_b} + \Theta_b^{nc} = \Lambda_b V + \Theta_b^{nc}, \end{aligned} \quad (6.2)$$

donde

$$\Theta_b^{nc} \equiv \tilde{F}^{nc} \cdot \frac{\partial \tilde{X}}{\partial q_b} \quad (6.3)$$

es la fuerza generalizada no conservativa. Al sustituir la fuerza generalizada en la ecuaciones de Euler tipo-T,  $\Lambda_b T = \Theta_b$ , se obtienen las ecuaciones de Euler-Lagrange para fuerzas no conservativas

$$\Lambda_b L \equiv \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_b} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_b} = \Theta_b^{nc} \quad ; \quad L \equiv T - V. \quad (6.4)$$

A continuación veamos cómo cambia en el tiempo la función energía. Esta función está definida por

$$h(q, \dot{q}, t) \equiv \sum_a \dot{q}_a \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} - L \quad (6.5)$$

y de acuerdo a (4.26) y a (6.4) su derivada temporal es

$$\frac{dh}{dt} = \sum_a \dot{q}_a \Lambda_a L - \frac{\partial L}{\partial t} = \sum_a \dot{q}_a \Theta_a^{nc} - \frac{\partial L}{\partial t}. \quad (6.6)$$

Si suponemos que la energía cinética es homogénea de grado 2 en las velocidades generalizadas, i.e.  $h$  es la energía, y además que el Lagrangeano no depende explícitamente del tiempo entonces

$$\frac{dE}{dt} = \sum_a \dot{q}_a \Theta_a^{nc}. \quad (6.7)$$

Luego la energía puede no ser una cantidad conservada. Si  $dE/dt < 0$  decimos que las fuerzas  $\Theta_a^{nc}$  son fuerzas disipativas en cambio si  $dE/dt > 0$  las denominaremos fuerzas impulsoras y usualmente dependerán de  $t$ .

### Ejemplo 6.1.

La figura muestra una cuenta de masa  $m$  restringida a moverse en un riel vertical, circular y de radio  $R$  que se encuentra en un medio viscoso. La fuerza viscosa sobre la partícula es

$$\mathbf{F}^{nc} = -mK\mathbf{V} = -mKR\dot{\theta}\hat{u}_\theta, \quad (6.8)$$

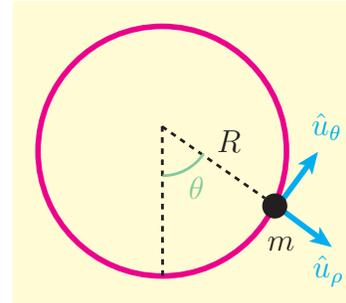
donde  $K$  es una constante positiva y  $\mathbf{V}$  es la velocidad de la cuenta.

El sistema tiene un grado de libertad y deseamos hallar la ecuación de movimiento para la coordenada generalizada  $\theta$ . La fuerza generalizada no conservativa es

$$\Theta_\theta^{nc} \equiv \tilde{F}^{nc} \cdot \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \theta} = \mathbf{F}^{nc} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}, \quad (6.9)$$

donde  $\mathbf{r}$  es el vector posición de la cuenta respecto al centro del aro. Para hallar  $\partial \mathbf{r} / \partial \theta$  podemos aprovechar el hecho de que el vector está rotando,

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \dot{\theta}^{-1} = \mathbf{w} \times \mathbf{r} \dot{\theta}^{-1} = R\hat{u}_\theta. \quad (6.10)$$



En consecuencia la fuerza generalizada no conservativa es

$$\Theta_{\theta}^{nc} = -mKR^2\dot{\theta}. \quad (6.11)$$

La energía cinética, la energía potencial y el Lagrangeano del sistema tienen las siguientes expresiones:

$$T = \frac{1}{2}m(R\dot{\theta})^2, \quad V(\theta) = -mgR\cos\theta,$$

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(R\dot{\theta})^2 + mgR\cos\theta.$$

Luego

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgR\sin\theta \quad \text{y} \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mR^2\dot{\theta}.$$

Al final las ecuaciones de Euler-Lagrange (6.4) conducen a la siguiente ecuación diferencial para  $\theta$

$$\ddot{\theta} + K\dot{\theta} + \frac{g}{R}\sin\theta = 0. \quad (6.12)$$

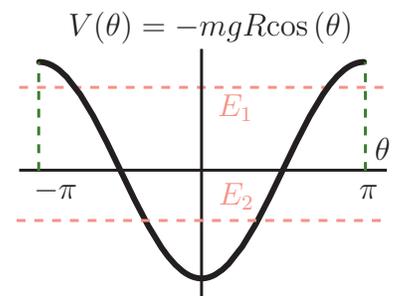
La energía del sistema

$$E = T + V(\theta) = \frac{1}{2}m(R\dot{\theta})^2 - mgR\cos\theta \quad (6.13)$$

no se conserva. En efecto de (6.7) se tiene que

$$\frac{dE}{dt} = \dot{\theta} \Theta_{\theta}^{nc} = -mKR^2\dot{\theta}^2 < 0. \quad (6.14)$$

La energía va disminuyendo, cuando sea menor que  $mgR$  los puntos de retorno (puntos de corte entre la energía y el potencial, en ellos la partícula está en reposo) ocurrirán para valores mas pequeños de  $\theta$  cada vez, ver figura. La cuenta oscilará alrededor del punto mas bajo ( $\theta = 0$ ) disminuyendo la amplitud de su movimiento y al final quedará en reposo en dicho punto.



## 6.2 Fuerzas reactivas en el formalismo de Lagrange.

Recordemos que las ecuaciones de Euler-Lagrange fueron obtenidas al proyectar las ecuaciones de Newton del sistema sobre el espacio tangente a la variedad de configuración, este proceso eliminó a las fuerzas reactivas de las ecuaciones de movimiento. Una forma de hallar las fuerzas reactivas consiste en despejarlas de las ecuaciones de Newton luego de resolver las ecuaciones de Lagrange. En esta sección seguiremos un camino diferente para obtener las fuerzas reactivas, modificaremos las ecuaciones de Euler-Lagrange de forma tal que no se requiera regresar a las ecuaciones de Newton.

Partimos de un sistema de  $N$  partículas y  $\kappa$  vínculos holónomos, i.e., con  $n = 3N - \kappa$  grados de libertad. Imaginaremos que estamos interesados en conocer las fuerzas reactivas asociadas a algunos de los vínculos y en consecuencia dividiremos el conjunto de vínculos en dos

$$f_j(\tilde{X}, t) = 0; \quad j = 1, \dots, K \quad (6.15)$$

$$f'_i(\tilde{X}, t) = 0; \quad i = 1, \dots, K' = \kappa - K. \quad (6.16)$$

Sólo queremos conocer las fuerzas reactivas asociadas a los vínculos  $f$ . Debido a la condición de suavidad (o principio de los trabajos virtuales) podemos escribir la fuerza reactiva neta,  $\tilde{R}_{neta}$ , como

$$\tilde{R}_{neta} = \tilde{R}' + \tilde{R}, \quad (6.17)$$

donde

$$\tilde{R}' \equiv \sum_{i=1}^{K'} \lambda_i \tilde{\nabla} f'_i \quad ; \quad \tilde{R} \equiv \sum_{j=1}^K \lambda_j \tilde{\nabla} f_j \quad (6.18)$$

Determinar la fuerza reactiva  $\tilde{R}$  equivale a determinar las cantidades  $\lambda_j$ , a continuación veremos cómo determinarlas dentro del formalismo de Lagrange. Por lo pronto trataremos a las fuerzas reactivas  $\tilde{R}$  como si fueran activas en el sentido de que usaremos coordenadas generalizadas que resuelvan sólo los vínculos  $f'$ ,

$$\tilde{X} = \tilde{X}(q, t) \quad / \quad f'_i(\tilde{X}(q, t), t) = 0 \quad \forall i, \forall q. \quad (6.19)$$

Esto significa que tendremos mas coordenadas generalizadas que grados de libertad ya que todavía faltan por satisfacerse los vínculos  $f$ . Es claro que podemos usar las ecuaciones de Lagrange tipo-t, (4.1), para obtener

$$\Lambda_b T = \Theta_b \quad ; \quad b = 1, \dots, n + K \quad (6.20a)$$

con

$$\Theta_b = (\tilde{F} + \tilde{R}) \cdot \frac{\partial \tilde{X}}{\partial q_b} \equiv \Theta_b^F + \Theta_b^f. \quad (6.20b)$$

La fuerza reactiva generalizada asociada a los vínculos  $f$  se puede escribir como

$$\Theta_b^f \equiv \tilde{R} \cdot \frac{\partial \tilde{X}}{\partial q_b} = \sum_{j=1}^K \lambda_j \tilde{\nabla} f_j \cdot \frac{\partial \tilde{X}}{\partial q_b} = \sum_{j=1}^K \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial q_b}, \quad (6.21)$$

por otro lado si las fuerzas activas provienen de un potencial,  $\tilde{F} = -\tilde{\nabla}V(\tilde{X})$ , entonces su fuerza generalizada asociada es

$$\Theta_b^F \equiv \tilde{F} \cdot \frac{\partial \tilde{X}}{\partial q_b} = -\tilde{\nabla}V \cdot \frac{\partial \tilde{X}}{\partial q_b} = -\frac{\partial V}{\partial q_b} = \Lambda_b V. \quad (6.22)$$

Al sustituir estas fuerzas generalizadas en (6.20) y definir nuevamente el Lagrangeano como  $L \equiv T - V$  se obtienen finalmente las ecuaciones de Euler-Lagrange modificadas

$$\Lambda_b L = \sum_{j=1}^K \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial q_b} \quad ; \quad b = 1, \dots, n + K \quad (6.23a)$$

$$f_j(\tilde{q}, t) = 0 \quad ; \quad j = 1, \dots, K. \quad (6.23b)$$

El lector puede observar que se incluyen los vínculos  $f$  debido a que todavía no están resueltos. En definitiva contamos con  $n + 2K$  ecuaciones e igual número de incógnitas entre coordenadas generalizadas y variables  $\lambda(t)$ . Estas últimas variables se denominan multiplicadores de Lagrange.

Hay otra forma en la que se puede pensar estos resultados. Podemos imaginar que tenemos un Lagrangeano  $L$  para un sistema que satisface las ligaduras  $\{f'_i\}$  y ahora queremos aprovechar este Lagrangeano y la elección de coordenadas generalizadas para estudiar otro sistema parecido al anterior pero con ligaduras adicionales  $\{f_j\}$ . En este caso las ecuaciones de Euler-Lagrange modificadas son las ecuaciones de movimiento del nuevo sistema

Las ecuaciones de movimiento (6.23) se pueden obtener a partir de un Lagrangeano en la forma usual. En efecto si definimos un nuevo Lagrangeano por

$$L_f(q, \lambda, \dot{q}, \dot{\lambda}, t) \equiv L + \sum_{j=1}^K \lambda_j f_j(q, t) \quad (6.24)$$

y tratamos a los multiplicadores igual que coordenadas generalizadas entonces las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\Lambda_{q_b} L_f = 0 \quad \text{y} \quad \Lambda_{\lambda_j} L_f = 0 \quad (6.25)$$

son equivalentes a (6.23), dejamos su demostración al lector como un pequeño ejercicio. Nótese que en la ecuación anterior utilizamos la notación original para el operador  $\Lambda$  e indicamos la variable respecto a la cual se aplica y no solamente el subíndice de la misma.

Por último observemos que se puede hablar de la fuerza reactiva asociada a un vínculo particular digamos  $f_j$ , esta fuerza es un vector de  $R^{3N}$  dado por

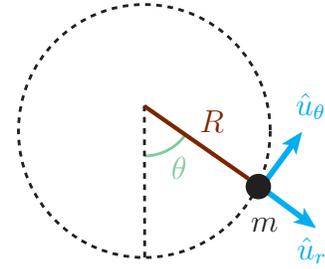
$$\tilde{R}^{f_j} \equiv \lambda_j \tilde{\nabla} f_j. \quad (6.26)$$

Definimos también al tri-vector fuerza reactiva asociado a este mismo vínculo y que actúa sobre la partícula  $\alpha$  como

$$\mathbf{R}_{(\alpha)}^{f_j} \equiv \lambda_j \nabla_{(\alpha)} f_j. \quad (6.27)$$

### Ejemplo 6.2 (Tensión en el péndulo plano).

El péndulo plano de la figura está formado por una varilla rígida y sin masa de longitud  $R$  y una cuenta de masa  $m$ , el conjunto está sometido a una gravedad constante  $g$ . Usando el formalismo de Lagrange deseamos hallar la reacción sobre la cuenta debida al vínculo que representa la varilla, i.e. deseamos hallar la tensión en la varilla.



Para comenzar liberamos el vínculo, esto es, pensamos que no existe y tratamos el problema de la cuenta moviéndose con libertad en un plano vertical y sometida a una gravedad constante. El origen lo colocaremos en lo que será luego el punto de suspensión del péndulo y utilizaremos las coordenadas polares de la cuenta como coordenadas generalizadas. El Lagrangeano para esta situación es

$$L(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}) = T - V = \frac{1}{2}m[\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2] + mgr\cos\theta. \quad (6.28)$$

A continuación consideremos la ligadura

$$f(r, \theta) \equiv r - R = 0 \quad (6.29)$$

y escribamos el nuevo lagrangeano con multiplicadores de Lagrange

$$L_f(r, \theta, \lambda, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\lambda}) = L + \lambda f = \frac{1}{2}m[\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2] + mgr\cos\theta + \lambda(r - R). \quad (6.30)$$

Ahora escribamos las ecuaciones de Lagrange. Comencemos con la ecuación para  $\lambda$ ,

$$0 = \Lambda_\lambda L_f = \frac{d}{dt} \frac{\partial L_f}{\partial \dot{\lambda}} - \frac{\partial L_f}{\partial \lambda} \Rightarrow r = R.$$

Ahora escribamos la ecuación de Lagrange para  $r$ .

$$\frac{\partial L_f}{\partial r} = m\dot{\theta}^2 r + mg\cos\theta + \lambda \quad \text{y} \quad \frac{\partial L_f}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$$

$$\Rightarrow \quad 0 = \Lambda_r L_f = \frac{d}{dt}(m\dot{r}) - m\dot{\theta}^2 r - mg\cos\theta - \lambda.$$

De ésta ecuación y usando la ligadura  $r = R$  obtenemos el multiplicado de Lagrange

$$\lambda = -m[g\cos\theta + R\dot{\theta}^2]. \quad (6.31)$$

La ecuación de Lagrange para  $\theta$  proporciona la ecuación de movimiento usual para el péndulo.

$$\frac{\partial L_f}{\partial \theta} = -mgr\sin\theta, \quad \frac{\partial L_f}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}, \quad \text{y} \quad 0 = \Lambda_\theta L_f \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{R}\sin\theta = 0.$$

La tensión o fuerza de reacción sobre la cuenta es

$$\mathbf{R} = \lambda \nabla f = \lambda \left( \frac{\partial f}{\partial r} \hat{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{u}_\theta \right) = \lambda \hat{u}_r = -m(R\dot{\theta}^2 + g\cos\theta) \hat{u}_r. \quad (6.32)$$

### Comentario 6.1 (El gradiente en coordenadas polares).

$$\nabla f \cdot \hat{u}_r = \nabla f \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial r}$$

$$\nabla f \cdot \hat{u}_\theta = \nabla f \cdot \frac{\partial \hat{u}_r}{\partial \theta} = \frac{1}{r} \nabla f \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}$$

## 6.3 Inclusión de vínculos no holónomos.

En esta sección ampliaremos el formalismo de Lagrange para incluir vínculos bilaterales que dependen de las velocidades en forma lineal.

Supondremos que nuestro sistema de  $N$  partículas está sujeto a los vínculos holónomos

$$\hat{f}_j(\tilde{X}, t) = 0; \quad j = 1, \dots, K \quad (6.33)$$

$$\hat{f}'_{j'}(\tilde{X}, t) = 0; \quad j' = 1, \dots, K' \quad (6.34)$$

y a los vínculos no holónomos

$$\hat{V}_\ell(\tilde{X}, \dot{\tilde{X}}, t) \equiv \sum_{I=1}^{3N} \hat{a}_{\ell I}(\tilde{X}, t) \dot{X}_I + \hat{b}_\ell(\tilde{X}, t) = 0; \quad \ell = 1, \dots, d, \quad (6.35)$$

todos ellos supuestos independientes unos de otros. Para que estos últimos vínculos sean realmente no holónomos debe cumplirse que

$$(\hat{a}_{\ell I})_J - (\hat{a}_{\ell J})_I \neq 0, \quad (6.36)$$

sin embargo mas adelante veremos que en el formalismo no será importante verificar si realmente se cumple o no ésta condición. También supondremos que hemos seleccionado  $n = 3N - K'$  coordenadas generalizadas,  $(q_1, \dots, q_n)$ , que resuelven los vínculos  $f'$ , i.e.,

$$\hat{f}'_{j'}(\tilde{X}(q, t), t) = 0 \quad \forall j' \in [1, K']. \quad (6.37)$$

Aquí  $n$  no es el número de grados de libertad del sistema.

Para lo que sigue será útil escribir los vínculos en función de las coordenadas generalizadas y distinguir con claridad los vínculos evaluados en  $\tilde{X}$  de los evaluados en  $q$ . Para los vínculos holónomos escribimos

$$f_j(q, t) \equiv \hat{f}_j(\tilde{X}(q, t), t) = 0 : \quad j = 1, \dots, K. \quad (6.38)$$

Los no holónomos requieren un poco mas de trabajo

$$\begin{aligned} V_\ell(q, \dot{q}, t) &\equiv \hat{V}_\ell(\tilde{X}(q, t), \tilde{X}(q, \dot{q}, t), t) \\ &= \sum_{J=1}^{3N} \hat{a}_{\ell J}(\tilde{X}, t) \left[ \frac{\partial X_J}{\partial q_b} \dot{q}_b + \frac{\partial X_J}{\partial t} \right] + \hat{b}_\ell(\tilde{X}(q, t), t) \\ &= \sum_{J=1}^{3N} \hat{a}_{\ell J}(\tilde{X}, t) \frac{\partial X_J}{\partial q_b} \dot{q}_b + \sum_{J=1}^{3N} \hat{a}_{\ell J}(\tilde{X}, t) \frac{\partial X_J}{\partial t} + \hat{b}_\ell(\tilde{X}(q, t), t). \end{aligned}$$

Finalmente tenemos

$$V_\ell(q, \dot{q}, t) \equiv \hat{V}_\ell(\tilde{X}(q, t), \tilde{X}(q, \dot{q}, t), t) = \sum_{J=1}^{3N} a_{\ell b}(q, t) \dot{q}_b + b_\ell = 0 \quad (6.39)$$

con

$$a_{\ell b}(q, t) \equiv \hat{a}_{\ell J}(\tilde{X}, t) \frac{\partial X_J}{\partial q_b} \quad \text{y} \quad b_\ell(q, t) \equiv \sum_{J=1}^{3N} \hat{a}_{\ell J}(\tilde{X}, t) \frac{\partial X_J}{\partial t} + \hat{b}_\ell \quad (6.40)$$

Vimos en un capítulo anterior que al incluir ligaduras en el sistema mecánico aparecen fuerzas reactivas desconocidas que hacen que el problema se vuelva indeterminado. Para sistemas con sólo vínculos holónomos eliminamos la indeterminación escogiendo una fuerza reactiva normal a la variedad de configuración. Ahora tenemos vínculos no holónomos, estos vínculos no pueden integrarse para obtener sólo relaciones entre las  $q$ 's (i.e. que no involucren

a las velocidades generalizadas) y por lo tanto no definen hipersuperficies en el espacio de configuraciones. Para incluirlos en el formalismo perderemos la imagen geométrica que nos acompañó hasta ahora, aunque nos inspiraremos en lo que ocurre cuando derivamos en el tiempo un vínculo holónimo.

Si un vínculo holónimo,  $\hat{f}_j = 0$ , se deriva respecto al tiempo se obtiene un vínculo que tiene la apariencia de un vínculo no-holónimo en el sentido de que depende linealmente de las velocidades,

$$\dot{\hat{f}}_j = \sum_I \frac{\partial \hat{f}_j}{\partial X_I} \dot{X}_I + \frac{\partial \hat{f}_j}{\partial t} = 0. \quad (6.41)$$

Por otro lado y debido a (3.24) (la ley de cancelación de puntos) la fuerza reactiva asociada a este vínculo puede escribirse como

$$(\tilde{R}^{\hat{f}_j})_I \equiv \lambda_j (\tilde{\nabla} \hat{f}_j)_I = \lambda_j \frac{\partial \hat{f}_j}{\partial X_I} = \lambda_j \frac{\partial \hat{f}_j}{\partial \dot{X}_I}. \quad (6.42)$$

Inspirados en este resultado definimos la fuerza reactiva en  $R^{3N}$  asociada a los vínculos no holónomos (6.35) como

$$(\tilde{R}^{\hat{V}_\ell})_I \equiv \mu_\ell \frac{\partial \hat{V}_\ell}{\partial \dot{X}_I} = \mu_\ell \hat{a}_{\ell I}(\tilde{X}, t), \quad (6.43)$$

donde  $\mu_\ell(t)$  es un multiplicador de Lagrange que debe ser determinado dinámicamente. Diremos que estamos extendiendo la “condición de suavidad” para incluir cierto tipo de vínculos no holónomos. En resumen la fuerza reactiva neta asociada a los vínculos holónomos  $\hat{f}_j$  y no holónomos  $\hat{V}_\ell$  es

$$(\tilde{R}^{\hat{f}, \hat{V}})_I \equiv \left( \sum_{j=1}^K \tilde{R}^{\hat{f}_j} + \sum_{\ell=1}^d \tilde{R}^{\hat{V}_\ell} \right)_I = \sum_{j=1}^K \lambda_j \frac{\partial \hat{f}_j}{\partial X_I} + \sum_{\ell=1}^d \mu_\ell \hat{a}_{\ell I}(\tilde{X}, t). \quad (6.44)$$

La fuerza reactiva generalizada correspondiente es

$$\begin{aligned} \Theta_b^{\hat{f}, \hat{V}} &\equiv \tilde{R}^{\hat{f}, \hat{V}} \cdot \frac{\partial \tilde{X}}{\partial q_b} = \sum_I \left( \sum_{j=1}^K \lambda_j \frac{\partial \hat{f}_j}{\partial X_I} + \sum_{\ell=1}^d \mu_\ell \hat{a}_{\ell I}(\tilde{X}, t) \right) \frac{\partial X_I}{\partial q_b} \\ &= \sum_{j=1}^K \lambda_j \frac{\partial \hat{f}_j}{\partial q_b} + \sum_{\ell=1}^d \mu_\ell \frac{\partial V_\ell(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_b}, \end{aligned} \quad (6.45)$$

donde hemos usado la definición de  $a_{\ell b}$  (6.40). Por último si las fuerzas activas provienen de un potencial  $V$ ,

$$\tilde{F} = -\tilde{\nabla} V \quad \Theta_b^{\tilde{F}} = \Lambda_b V \quad (6.46)$$

entonces las ecuaciones de Euler tipo-T conducen a las ecuaciones de Euler-Lagrange para vínculos no holónomos

$$\Lambda_b L = \sum_{j=1}^K \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial q_b} + \sum_{\ell=1}^d \mu_\ell \frac{\partial V_\ell(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_b} \quad ; \quad b = 1, \dots, n. \quad (6.47)$$

Estas ecuaciones deben complementarse con los propios vínculos,

$$f_j(q, t) = 0; \quad j = 1, \dots, K \quad (6.48a)$$

$$V_\ell(q, \dot{q}, t) = \sum_{b=1}^n a_{\ell b}(q, t) \dot{q}_b + b_\ell = 0; \quad \ell = 1, \dots, d. \quad (6.48b)$$

Tenemos entonces un sistema con  $n + K + d$  ecuaciones, de 6.47 a 6.48b, e igual número de incógnitas dadas por  $\{q, \lambda, \mu\}$ .

Por último conviene hacer un comentario sobre los desplazamientos virtuales. Sea  $Q'$  la variedad de configuración formada por los puntos  $\tilde{X}$  que satisfacen los vínculos holónomos  $\hat{f}'_j$ , un desplazamiento infinitesimal arbitrario en  $Q'$  es un elemento del espacio tangente dado por

$$\tilde{\delta X} \equiv \sum_b \frac{\partial \tilde{X}}{\partial q_b} \delta q_b \in T_{\tilde{X}} Q'. \quad (6.49)$$

Se suele definir un desplazamiento virtual como un desplazamiento  $\tilde{\delta X}$  para el cual las fuerzas reactivas sean perpendiculares,

$$\tilde{R}^{\hat{f}_j} \cdot \tilde{\delta X} = \sum_b \lambda_j \tilde{\nabla} \hat{f}_j \cdot \frac{\partial \tilde{X}}{\partial q_b} \delta q_b = \sum_b \frac{\partial f_j}{\partial q_b} \delta q_b = 0 \quad (6.50)$$

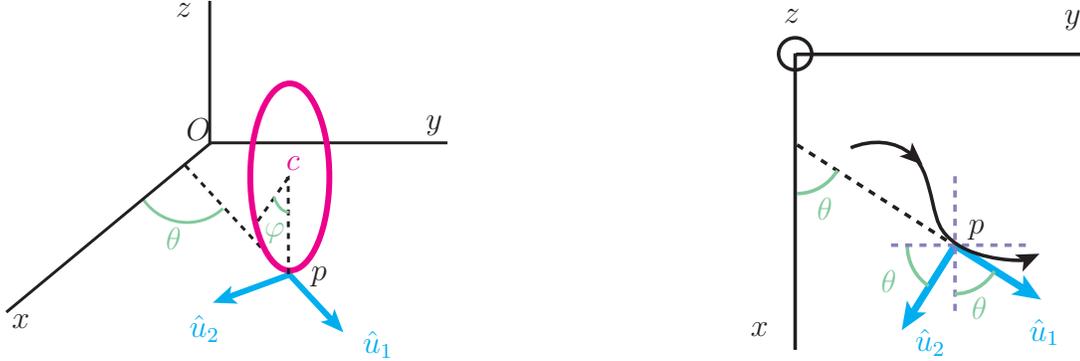
$$\tilde{R}^{\hat{V}_\ell} \cdot \tilde{\delta X} = \sum_b \sum_I \mu_\ell \hat{a}_{\ell I} \frac{\partial X_I}{\partial q_b} \delta q_b = \sum_b \mu_\ell a_{\ell b} \delta q_b = 0. \quad (6.51)$$

Esto se parafrasea diciendo que las fuerzas reactivas no realizan trabajo virtual. Estas ecuaciones imponen condiciones que deben satisfacer las cantidades  $\delta q_b$  para que  $\tilde{\delta X}$  sea un desplazamiento virtual. Nótese que aún si no existen vínculos holónomos sin resolver (vínculos  $\hat{f}_j$ ) la ecuación  $\tilde{R}^{\hat{V}_\ell} \cdot \tilde{\delta X} = 0$  puede dar condiciones sobre los  $\delta q_b$ , esto significa que la fuerza generalizada asociada a los vínculos no holónomos puede tener componentes sobre el espacio tangente a la variedad de configuración.

### Ejemplo 6.3 (Aro que rueda sin deslizar).

Consideremos un aro homogéneo de masa  $M$  y radio  $R$  que, siempre vertical, rueda sin deslizar sobre una superficie horizontal, ver dibujo siguiente a la izquierda. El dibujo a la

derecha presenta la misma situación pero mostrada desde arriba, la línea curva orientada representa una supuesta trayectoria del punto de contacto del aro con el piso. Deseamos hallar las ecuaciones de Lagrange que rigen este sistema.



Llamaremos:

- $c$  al centro del aro (también es su centro de masa) y  $(x, y, R)$  a sus coordenadas cartesianas.
- $p$  al punto del aro que en un instante dado está en contacto con el piso, sus coordenadas cartesianas son  $(x, y, 0)$ . Todos los puntos  $p$  conforman la curva orientada que se muestra en el dibujo anterior a la derecha.
- $\hat{u}_1$  al vector unitario tangente al aro en el punto  $p$ .
- $\hat{u}_2 = \hat{u}_1 \times \hat{u}_z$ . Es un vector unitario perpendicular al plano del aro.
- $\theta$  al ángulo entre  $\hat{u}_1$  y  $\hat{u}_x$ .
- $\varphi$  al ángulo subtendido entre una marca en el aro y el punto  $p$  del momento.

Tomaremos a las variables  $(x, y, \theta, \varphi)$  como coordenadas generalizadas y consideraremos tres referenciales: el referencial inercial  $S$  con origen en  $O$  y ejes fijos  $(\hat{u}_x, \hat{u}_y, \hat{u}_z)$ , el referencial  $S_{\text{cm}}$  con origen en  $c$  y ejes fijos paralelos a los de  $S$  (referencial centro de masa) y el referencial  $S_{\text{aro}}$  con origen en  $c$  y solidario al aro. Las velocidad angular entre  $S$  y  $S_{\text{cm}}$  es nula, para el otro referencial se cumple que

$$\mathbf{W} \equiv \mathbf{W}_{S_{\text{aro}}|S_{\text{cm}}} = \mathbf{W}_{S_{\text{aro}}|S} = \dot{\theta}\hat{u}_z - \dot{\varphi}\hat{u}_2. \quad (6.52)$$

La velocidad del punto  $c$  en el referencial  $S$  es

$$\mathbf{V}_c = \dot{x}\hat{u}_x + \dot{y}\hat{u}_y. \quad (6.53)$$

Que el aro rueda sin deslizar significa que no hay velocidad relativa entre los puntos de contacto del aro y la superficie sobre la que rueda. En nuestro caso eso significa que la velocidad del punto  $p$  es nula en  $S$ . A continuación veremos que esta condición impone

ligaduras no holónomas. Sea  $\alpha$  un punto arbitrario del aro y llamemos  $\mathbf{r}_{c\alpha}$  a su posición respecto a  $c$  y  $\mathbf{V}_\alpha$  a su velocidad en  $S$ . Se cumple que

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_\alpha &= \mathbf{V}_{\alpha|S_{cm}} + \mathbf{V}_c = \mathbf{V}_{\alpha|S_{aro}} + \mathbf{W} \times \mathbf{r}_{c\alpha} + \mathbf{V}_c \\ &= (\dot{\theta}\hat{u}_z - \dot{\varphi}\hat{u}_2) \times \mathbf{r}_{c\alpha} + \dot{x}\hat{u}_x + \dot{y}\hat{u}_y.\end{aligned}\quad (6.54)$$

Cuando  $\alpha$  es el punto  $p$  se tiene que  $\mathbf{V}_\alpha = 0$  y  $\mathbf{r}_{cp} = -R\hat{u}_z$ , luego

$$\begin{aligned}0 &= (\dot{\theta}\hat{u}_z - \dot{\varphi}\hat{u}_2) \times (-R\hat{u}_z) + \dot{x}\hat{u}_x + \dot{y}\hat{u}_y = -R\dot{\varphi}\hat{u}_1 + \dot{x}\hat{u}_x + \dot{y}\hat{u}_y \\ &= -R\dot{\varphi}(\cos\theta\hat{u}_x + \sen\theta\hat{u}_y) + \dot{x}\hat{u}_x + \dot{y}\hat{u}_y.\end{aligned}$$

Obteniéndose los siguientes dos vínculos no holónomos:

$$V_1 \equiv \dot{x} - R\dot{\varphi}\cos\theta = 0 \quad (6.55)$$

$$V_2 \equiv \dot{y} - R\dot{\varphi}\sen\theta = 0 \quad (6.56)$$

A continuación halleemos la energía cinética y el Lagrangeano del sistema. Partimos de la relación

$$T = \frac{1}{2}MV_{cm}^2 + T|_{S_{cm}} = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + T|_{S_{cm}}, \quad (6.57)$$

donde la energía cinética en el referencial centro de masa viene dada por

$$\begin{aligned}T|_{S_{cm}} &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} |\mathbf{V}_{\alpha|S_{cm}}|^2 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} |(\dot{\theta}\hat{u}_z - \dot{\varphi}\hat{u}_2) \times \mathbf{r}_{c\alpha}|^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} |R\dot{\theta}\sen(\pi - \varphi_{\alpha})\hat{u}_2 + \dot{\varphi}R\hat{u}_{\varphi_{\alpha}}|^2 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} [R^2\sen^2(\varphi_{\alpha})\dot{\theta}^2 + R^2\dot{\varphi}^2] \\ &= \frac{1}{2}R^2\dot{\theta}^2 \int_0^{2\pi} \sen^2(\varphi) \left(\frac{M}{2\pi}d\varphi\right) + \frac{M}{2}R^2\dot{\varphi}^2 = \frac{MR^2\dot{\theta}^2}{4} + \frac{M}{2}R^2\dot{\varphi}^2.\end{aligned}$$

Cómo el potencial es constante obtenemos finalmente

$$L = T = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{MR^2\dot{\theta}^2}{4} + \frac{M}{2}R^2\dot{\varphi}^2. \quad (6.58)$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange con vínculos (6.47) para este problema son

$$\Lambda_b L = \mu_1 \frac{\partial V_1}{\partial \dot{q}_b} + \mu_2 \frac{\partial V_2}{\partial \dot{q}_b} \quad \text{con } q_b \in \{x, y, \theta, \varphi\}. \quad (6.59)$$

Dejaremos cómo un ejercicio para el lector la solución de las ecuaciones de movimiento (ecuaciones de Euler-Lagrange mas vínculos), en particular se puede demostrar que el centro de masa describe en su movimiento un círculo o una recta dependiendo de las condiciones iniciales.

## 6.4 Transformación de coordenadas generalizadas.

En esta sección estudiaremos las consecuencias que tiene dentro del formalismo de Lagrange una transformación de coordenadas generalizadas. Cuando pasamos de coordenadas cartesianas a generalizadas, en los capítulos anteriores, no escogimos ningún conjunto particular de coordenadas generalizadas para desarrollar el formalismo de Lagrange, en consecuencia es evidente que al cambiar de coordenadas generalizadas las ecuaciones de Lagrange mantendrán su forma, se dice entonces que las ecuaciones de Lagrange son covariantes bajo una transformación de coordenadas. Sin embargo será instructivo mostrar explícitamente esta covariancia sin pasar por las coordenadas cartesianas y sin usar el hecho de que el Lagrangeano sea de la forma  $L = T - V$ . En esta sección estudiaremos también las propiedades de transformación del operador diferencial  $\Lambda_{q_a}$ , del momento conjugado, de la función energía y de las fuerzas generalizadas.

Comencemos estudiando el comportamiento del operador diferencial  $\Lambda_{q_a}$  frente a un cambio de variables. Sea  $\{Q_1(t), \dots, Q_m(t)\}$  un conjunto de variables y  $\hat{f}(Q, \dot{Q}, t)$  una función que depende de estas variables, sus velocidades y del tiempo. Recordemos que el operador  $\Lambda_{Q_a}$  actúa sobre esta función de la siguiente manera

$$\Lambda_{Q_a} \hat{f} \equiv \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \hat{f}}{\partial \dot{Q}_a} \right) - \frac{\partial \hat{f}}{\partial Q_a}. \quad (6.60)$$

Consideremos también otro conjunto de variables  $\{q_1(t), \dots, q_n(t)\}$  tales que  $Q = Q(q, t)$ , no pediremos que esta relación se pueda invertir. Definimos la función

$$f(q, \dot{q}, t) = \hat{f}(Q(q, t), \dot{Q}(q, \dot{q}, t), t) \quad (6.61)$$

se trata de la misma función  $\hat{f}$  expresada en las variables  $q$ . Deseamos hallar la relación entre  $\Lambda_q f$  y  $\Lambda_Q \hat{f}$ , veamos el procedimiento.

$$\Lambda_{q_b} f = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_b} \right) - \frac{\partial f}{\partial q_b} = \sum_a \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \hat{f}}{\partial \dot{Q}_a} \frac{\partial Q_a}{\partial \dot{q}_b} \right) - \left( \frac{\partial \hat{f}}{\partial Q_a} \frac{\partial Q_a}{\partial q_b} + \frac{\partial \hat{f}}{\partial \dot{Q}_a} \frac{\partial \dot{Q}_a}{\partial q_b} \right) \right]$$

pero usando la ley de cancelación de puntos (3.24) y la identidad (3.25) obtenemos

$$\begin{aligned} \Lambda_{q_b} f &= \sum_a \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \hat{f}}{\partial \dot{Q}_a} \frac{\partial Q_a}{\partial \dot{q}_b} \right) - \left( \frac{\partial \hat{f}}{\partial Q_a} \frac{\partial Q_a}{\partial q_b} + \frac{\partial \hat{f}}{\partial \dot{Q}_a} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial Q_a}{\partial q_b} \right) \right) \right] \\ &= \sum_a \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \hat{f}}{\partial \dot{Q}_a} \right) \frac{\partial Q_a}{\partial q_b} - \frac{\partial \hat{f}}{\partial Q_a} \frac{\partial Q_a}{\partial q_b} \right]. \end{aligned}$$

Y finalmente obtenemos la relación deseada

$$\Lambda_{q_b} f = \sum_a (\Lambda_{Q_a} \hat{f}) \frac{\partial Q_a}{\partial q_b}. \quad (6.62)$$

**Comentario 6.2 (Potencial dependiente de las velocidades).** Como una aplicación inmediata de la ley de transformación del operador  $\Lambda$  demosntremos que el potencial dependiente de velocidad es el mismo para una fuerza  $\tilde{F}$  que para la fuerza generalizada correspondiente  $\Theta$ . En efecto

$$(\tilde{F})_{X_I} = \Lambda_{X_I} \hat{V}(\tilde{X}, \dot{\tilde{X}}, t) \Rightarrow \Theta_{q_b} \equiv \tilde{F} \cdot \frac{\partial \tilde{X}}{\partial q_b} = \sum_I (\Lambda_{X_I} \hat{V}) \frac{\partial X_I}{\partial q_b} = \Lambda_{q_b} V(q, \dot{q}, t)$$

$$\text{con } V(q, \dot{q}, t) \equiv \hat{V}(\tilde{X}(q, t), \dot{\tilde{X}}(q, \dot{q}, t), t).$$

Si en lugar de una función  $f$  arbitraria usamos el Lagrangeano de un sistema y suponemos que el cambio de coordenadas generalizadas  $q \rightarrow Q$  es invertible entonces la ecuación (6.62) conduce a

$$\Lambda_{q_b} L = \sum_a (\Lambda_{Q_a} \hat{L}) \frac{\partial Q_a}{\partial q_b} \quad \text{y} \quad \Lambda_{Q_a} \hat{L} = \sum_b (\Lambda_{q_b} L) \frac{\partial q_b}{\partial Q_a}, \quad (6.63)$$

donde

$$\hat{L}(Q, \dot{Q}, t) = L(q(Q, t), \dot{q}(Q, \dot{Q}, t), t). \quad (6.64)$$

Luego

$$\Lambda_{q_a} L = 0 \quad \forall a \quad \Leftrightarrow \quad \Lambda_{Q_a} \hat{L} = 0 \quad \forall a, \quad (6.65)$$

esto es, las ecuaciones de Euler-Lagrange mantienen su forma (son covariantes) bajo transformaciones de coordenadas. También es interesante estudiar como transforman los momentos conjugados y la función energía. Llamemos  $P_a$  y  $p_a$  a los momentos conjugados a las variables  $Q_a$  y  $q_a$  respectivamente, luego

$$P_a = \frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{Q}_a} = \sum_b \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_b} \frac{\partial \dot{q}_b}{\partial \dot{Q}_a} = \sum_b \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_b} \frac{\partial q_b}{\partial Q_a},$$

por lo cual

$$P_a \equiv \frac{\partial \hat{L}}{\partial \dot{Q}_a} = \sum_b p_b \frac{\partial q_b}{\partial Q_a} \quad \text{y} \quad p_a \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} = \sum_b P_b \frac{\partial Q_b}{\partial q_a}. \quad (6.66)$$

Para obtener como transforma la función energía usaremos el resultado anterior y el hecho de que  $L = \hat{L}$ .

$$\begin{aligned}
h &= \sum_a p_a \dot{q}_a - L = \sum_a \left( \sum_b P_b \frac{\partial Q_b}{\partial q_a} \right) \left( \sum_c \frac{\partial q_a}{\partial Q_c} \dot{Q}_c + \frac{\partial q_a(Q, t)}{\partial t} \right) - L \\
&= \sum_{b,c} P_b \left( \sum_a \frac{\partial Q_b}{\partial q_a} \frac{\partial q_a}{\partial Q_c} \right) \dot{Q}_c + \sum_{a,b} P_b \frac{\partial Q_b}{\partial q_a} \frac{\partial q_a(Q, t)}{\partial t} - \hat{L} \\
&= \sum_b P_b \dot{Q}_b - \hat{L} + \sum_{a,b} P_b \frac{\partial Q_b}{\partial q_a} \frac{\partial q_a(Q, t)}{\partial t}.
\end{aligned}$$

A continuación obtendremos una identidad que nos permitirá simplificar el último sumando. Sean las funciones  $g = g(q, t)$  y  $\hat{g}(Q, t) = g(q(Q, t), t)$ , entonces

$$\frac{\partial \hat{g}}{\partial t} = \sum_a \frac{\partial g(q, t)}{\partial q_a} \frac{\partial q_a(Q, t)}{\partial t} + \frac{\partial g(q, t)}{\partial t}.$$

Si ahora evaluamos para  $g = Q_b(q, t)$  obtenemos la identidad buscada

$$0 = \sum_a \frac{\partial Q_b(q, t)}{\partial q_a} \frac{\partial q_a(Q, t)}{\partial t} + \frac{\partial Q_b(q, t)}{\partial t}. \quad (6.67)$$

Luego

$$h(q, \dot{q}, t) = h'(Q, \dot{Q}, t) - \sum_b P_b \frac{\partial Q_b(q, t)}{\partial t}, \quad (6.68)$$

donde  $h$  y  $h'$  son las funciones energía para las coordenadas  $q$  y  $Q$  respectivamente. Nótese que si el cambio de coordenadas no depende explícitamente del tiempo,  $Q = Q(q)$ , las funciones energía coinciden.

Por último completemos la sección escribiendo como transforman las ecuaciones de movimiento cuando el sistema posee vínculos no holónomos. Consideremos un sistema mecánico con Lagrangeano  $L(q, \dot{q}, t)$ , vínculos holónomos y no-holónomos dados por (6.48) y fuerza reactiva dada por (6.45). Si realizamos una transformación de coordenadas invertible  $q \rightarrow Q = Q(q, t)$  el Lagrangeano para las variables  $Q$  viene dado por (6.64) y los vínculos expresados en las nuevas coordenadas son

$$\hat{f}_j(Q, t) = f_j(q(Q, t), t) \quad \text{y} \quad \hat{V}_\ell(Q, \dot{Q}, t) = V_\ell(q(Q, t), \dot{q}(Q, \dot{Q}, t), t). \quad (6.69)$$

De las identidades

$$\frac{\partial \hat{f}_j}{\partial Q_a} = \sum_b \frac{\partial f_j}{\partial q_b} \frac{\partial q_b}{\partial Q_a} \quad \text{y} \quad \frac{\partial \hat{V}_\ell}{\partial \dot{Q}_a} = \sum_b \frac{\partial V_\ell}{\partial \dot{q}_b} \frac{\partial \dot{q}_b}{\partial \dot{Q}_a} = \sum_b \frac{\partial V_\ell}{\partial \dot{q}_b} \frac{\partial q_b}{\partial Q_a} \quad (6.70)$$

es inmediato que la fuerza reactiva generalizada transforma de acuerdo a

$$\hat{\Theta}_a \equiv \sum_{j=1}^K \lambda_j \frac{\partial \hat{f}_j}{\partial Q_a} + \sum_{\ell=1}^d \mu_\ell \frac{\partial \hat{V}_\ell(Q, \dot{Q}, t)}{\partial \dot{Q}_a} = \sum_b \Theta_b \frac{\partial q_b}{\partial Q_a}. \quad (6.71)$$

Debido a este resultado y a (6.63) obtenemos finalmente

$$\Lambda_{Q_a} \hat{L} - \hat{\Theta}_a = \sum_b (\Lambda_{q_b} L - \Theta_b) \frac{\partial q_b}{\partial Q_a},$$

esto es, las ecuaciones de Euler-Lagrange con vínculos no-holónomos son covariantes,

$$\Lambda_{Q_a} \hat{L} - \hat{\Theta}_a = 0 \quad \forall a \quad \Leftrightarrow \quad \Lambda_{q_a} L - \Theta_a = 0 \quad \forall a. \quad (6.72)$$

## 6.5 Teorema de Noether Lagrangeano (punto de vista pasivo).

Frente a ciertos cambios de coordenadas el Lagrangeano puede no cambiar en absoluto, diremos entonces que el Lagrangeano es invariante frente a esa transformación. En esta sección mostraremos que hay asociada una cantidad conservada con cada invariancia del Lagrangeano, este resultado se conoce con el nombre de teorema de Noether Lagrangeano.

Partamos de un sistema mecánico con coordenadas  $\{q_a\}$ , Lagrangeano  $L(q, \dot{q}, t)$  y ecuaciones de movimiento  $\Lambda_a L = 0$ . Consideremos una familia de transformaciones de coordenadas, que dependa de un parámetro continuo  $\varepsilon$ ,

$$q(t) \rightarrow q' = q'(q, t, \varepsilon) \quad / \quad q'(q, t, 0) = q. \quad (6.73)$$

Aquí nos interesarán solamente desarrollos hasta primer orden en el parámetro  $\varepsilon$ ,

$$\delta_\varepsilon q_a \equiv q'_a - q_a = \varepsilon f_a(q, t) + o(\varepsilon^2), \quad (6.74)$$

donde  $\{f_a(q, t) / a = 1, \dots, n\}$  es algún conjunto de funciones. Este cambio induce una transformación en las velocidades generalizadas

$$\dot{q}(t) \rightarrow \dot{q}' \quad / \quad \dot{q}'_a = \dot{q}_a + \varepsilon \frac{d}{dt} f_a + o(\varepsilon^2) \quad (6.75)$$

o si se quiere

$$\delta_\varepsilon \dot{q}_a \equiv \dot{q}'_a - \dot{q}_a = \frac{d}{dt} \delta_\varepsilon q_a, \quad (6.76)$$

esto es la derivada respecto al tiempo y la variación para las variables  $q$  conmutan.

Deseamos estudiar como cambia el Lagrangeano cuando en lugar de las variables  $q$  sustituimos las  $q'$ , para ello comencemos definiendo la función

$$L_\varepsilon(q, \dot{q}, t) \equiv L(q'(q, t, \varepsilon), \dot{q}'(q, \dot{q}, t, \varepsilon), t). \quad (6.77)$$

Veamos brevemente la relación entre esta función y el Lagrangeano en las nuevas variables,  $\hat{L}(q', \dot{q}', t)$ , definido por (6.64). Para ello conviene escribir la transformación de coordenadas como una aplicación del espacio producto cartesiano de la variedad de configuración con el espacio tangente sobre si mismo,

$$\{q, \dot{q}\} \rightarrow \{q', \dot{q}'\} = F_\varepsilon(\{q, \dot{q}\}). \quad (6.78)$$

Tenemos entonces que

$$L_\varepsilon(F_\varepsilon^{-1}(\{q, \dot{q}\}), t) = L(\{q, \dot{q}\}, t) = \hat{L}(F_\varepsilon(\{q, \dot{q}\}), t). \quad (6.79)$$

A continuación hagamos un desarrollo perturbativo de  $L_\varepsilon$  en el parámetro  $\varepsilon$ .

$$\begin{aligned} L(q + \delta_\varepsilon q, \dot{q} + \delta_\varepsilon \dot{q}, t) &= L + \sum_a \left[ \frac{\partial L}{\partial q_a} \delta_\varepsilon q_a + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \delta_\varepsilon \dot{q}_a \right] + o(\varepsilon^2) \\ &= L + \sum_a \left[ \frac{\partial L}{\partial q_a} \delta_\varepsilon q_a + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \delta_\varepsilon q_a \right) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \right) \delta_\varepsilon q_a \right] + o(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} L_\varepsilon(q, \dot{q}, t) &= L(q + \delta_\varepsilon q, \dot{q} + \delta_\varepsilon \dot{q}, t) \\ &= L - \sum_a (\Lambda_{q_a} L) \delta_\varepsilon q_a + \frac{d}{dt} \left( \sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \delta_\varepsilon q_a \right) + o(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (6.80)$$

Podemos definir la variación

$$\delta_\varepsilon L \equiv L_\varepsilon - L = \left. \frac{\partial L_\varepsilon}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \varepsilon + o(\varepsilon^2) \quad (6.81)$$

y escribir el resultado anterior como

$$\delta_\varepsilon L = - \sum_a (\Lambda_{q_a} L) \delta_\varepsilon q_a + \frac{d}{dt} \left( \sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} \delta_\varepsilon q_a \right) + o(\varepsilon^2). \quad (6.82)$$

Siguiendo la nomenclatura de Saletan-Cromer, diremos que la transformación (6.74) es una cuasi-simetría si el Lagrangeano no cambia a menos de una derivada exacta en el tiempo

y la llamaremos una simetría (un caso particular de cuasi-simetría) si el Lagrangeano es invariante.

$$\delta_\varepsilon q \text{ es una cuasi-simetría} \quad \Leftrightarrow \quad \exists G / \delta_\varepsilon L = \varepsilon \frac{d}{dt} G(q, t) + o(\varepsilon^2), \quad (6.83)$$

$$\delta_\varepsilon q \text{ es una simetría} \quad \Leftrightarrow \quad \delta_\varepsilon L = 0 + o(\varepsilon^2). \quad (6.84)$$

Ahora podemos enunciar el teorema de Noether: La familia de transformaciones infinitesimales de coordenadas  $\delta_\varepsilon q_a = \varepsilon f_a(q, t) + o(\varepsilon^2)$  es una cuasi-simetría con  $G$  definido por

$$\left. \frac{\partial L_\varepsilon}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \frac{d}{dt} G(q, t) \quad (6.85)$$

si y solo si

$$\Gamma(q, \dot{q}, t) \equiv \sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} f_a(q, t) - G(q, t) = \sum_a p_a f_a - G \quad (6.86)$$

es una constante de movimiento. Podemos parafrasear el teorema con menos detalle: Por cada cuasi-simetría del Lagrangeano hay asociada una cantidad conservada y recíprocamente a cada cantidad conservada hay asociada una cuasi-simetría del Lagrangeano.

Ahora probaremos la condición de necesidad del teorema y no la suficiencia. Una demostración completa del teorema puede encontrarse en "Theoretical Mechanics" de Saletan y Cromer. Partamos de que  $\delta_\varepsilon q = \varepsilon f(q, t) + o(\varepsilon^2)$  es una cuasi-simetría entonces de (6.82) y (6.83) se obtiene que

$$-\sum_a (\Lambda_{q_a} L) f_a + \frac{d}{dt} \left( \sum_a \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} f_a \right) = \frac{d}{dt} G(q, t) \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \Gamma(q, \dot{q}, t) = \sum_a (\Lambda_{q_a} L) f_a(q, t)$$

con  $\Gamma$  definido por (6.86). El lado derecho de la última igualdad se anula sobre las ecuaciones de movimiento por lo cual  $\Gamma$  es una constante de movimiento.

A continuación estudiemos como cambia la expresión (6.86) de la constante de movimiento si realizamos una transformación de coordenadas generalizadas. Sea  $q \rightarrow Q = Q(q, t)$  un cambio de coordenadas entonces el cambio (6.74) en las coordenadas  $q$  induce un cambio en las coordenadas  $Q$ ,

$$\delta_\varepsilon Q_a \equiv Q'_a - Q_a = \sum_b \frac{\partial Q_a}{\partial q_b} \delta_\varepsilon q_b = \sum_b \frac{\partial Q_a}{\partial q_b} f_b \varepsilon + o(\varepsilon^2) = \varepsilon F_a(Q, t) + o(\varepsilon^2), \quad (6.87)$$

con

$$F_a(Q, t) \equiv \sum_b \frac{\partial Q_a}{\partial q_b} f_b. \quad (6.88)$$

Por otro lado de acuerdo a (6.64) el Lagrangeano en las nuevas coordenadas es  $\hat{L}(Q, \dot{Q}, t) = L(q, \dot{q}, t)$  luego  $\delta_\varepsilon \hat{L} = \delta_\varepsilon L$  y esto significa que la existencia de la simetría no depende de las coordenadas generalizadas elegidas. Veamos que la constante de movimiento obtenida por medio del teorema de Noether es la misma para los dos conjuntos de coordenadas generalizadas. En las nuevas variables la constante de movimiento se escribe como

$$\hat{\Gamma}(Q, \dot{Q}, t) \equiv \Gamma(q(Q, t), \dot{q}(Q, \dot{Q}, t), t) = \sum_a p_a f_a - G(q(Q, t), t),$$

debido a (6.66) y a (6.88) se cumple finalmente que

$$\hat{\Gamma}(Q, \dot{Q}, t) = \sum_{a,b} \left( P_b \frac{\partial Q_b}{\partial q_a} \right) f_a - G(q(Q, t), t) = \sum_b P_b F_b - G(q(Q, t), t).$$

Estudiemos a continuación que relación existe entre las coordenadas cíclicas y el tema de esta sección. Llamemos  $Q = q_n$  a la  $n$ -ésima coordenada generalizada para  $n$  fijo. Una transformación en la cual sólo varíe infinitesimalmente esta coordenada se escribe como

$$\delta_\varepsilon q_a = \varepsilon f_a + o(\varepsilon^2) \quad \text{con} \quad f_a = \delta_{a,n}. \quad (6.89)$$

Nótese que hacer una variación en  $\varepsilon$  implica variar  $Q$  y es entonces claro que

$$\left. \frac{\partial L_\varepsilon}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \frac{\partial L}{\partial Q}. \quad (6.90)$$

Como una consecuencia de esta igualdad y de (6.84) se obtiene que el Lagrangeano es invariante bajo esta transformación si y solo si la coordenada  $Q$  es cíclica. Sabemos que si una coordenada es cíclica entonces su momento conjugado es una constante de movimiento, esta constante de movimiento es la misma que se obtiene del teorema de Noether ya que  $\Gamma = \sum_a p_a f_a = p_n$ . Podemos pensar en el teorema de Noether como una generalización de la idea de coordenadas cíclicas.

## 6.6 Relación entre la traslación y rotación de un sistema y sus momentos lineal y angular.

En esta sección veremos como los momentos lineal y angular está relacionado con los momentos conjugados a variables generalizadas que describen la traslación y rotación del sistema. Utilizando el teorema de Noether encontraremos que los sistemas invariantes bajo traslaciones o rotaciones tienen momento lineal o angular constante.

Partamos de un sistema mecánico de  $N$  partículas que está descrito con  $n$  coordenadas generalizadas  $\{q_1, \dots, q_n\}$ , siendo su Lagrangeano

$$L(q, \dot{q}, t) = T - V = \sum_{\beta} \frac{1}{2} m_{\beta} |\dot{\mathbf{r}}_{\beta}|^2 - V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N). \quad (6.91)$$

Donde el vector posición de cada partícula es una función de las coordenadas generalizadas,  $\mathbf{r}_{\beta} = \mathbf{r}_{\beta}(q, t)$  y las ecuaciones de movimiento son  $\Lambda_a L = 0$ . A continuación consideremos la transformación infinitesimal

$$\delta_{\varepsilon} q_a \equiv q'_a - q_a = \varepsilon f_a(q, t) + o(\varepsilon^2), \quad (6.92)$$

donde  $\varepsilon$  es un parámetro infinitesimal y constante. Esta transformación induce cambios en las posiciones y velocidades de las partículas dados por

$$\delta_{\varepsilon} \mathbf{r}_{\beta} = \mathbf{r}_{\beta}(q', t) - \mathbf{r}_{\beta}(q, t) = \varepsilon \sum_a \frac{\partial \mathbf{r}_{\beta}}{\partial q_a} f_a + o(\varepsilon^2), \quad (6.93)$$

$$\delta_{\varepsilon} \dot{\mathbf{r}}_{\beta} = \frac{d}{dt} (\mathbf{r}_{\beta}(q', t) - \mathbf{r}_{\beta}(q, t)) = \frac{d}{dt} \delta_{\varepsilon} \mathbf{r}_{\beta}. \quad (6.94)$$

Estas transformaciones inducidas se realizan a tiempo fijo y respetan cualquier vínculo que eventualmente estén resolviendo las coordenadas generalizadas. Para lo que sigue será de utilidad contar con las variaciones inducidas en las energías cinética y potencial del sistema de partículas. Para la energía cinética se cumple

$$\delta_{\varepsilon} T = \sum_{\beta} m_{\beta} \dot{\mathbf{r}}_{\beta} \cdot \delta_{\varepsilon} \dot{\mathbf{r}}_{\beta} = \sum_{\beta} m_{\beta} \dot{\mathbf{r}}_{\beta} \cdot \frac{d}{dt} \delta_{\varepsilon} \mathbf{r}_{\beta},$$

luego

$$\delta_{\varepsilon} T = \varepsilon \sum_{\beta} m_{\beta} \dot{\mathbf{r}}_{\beta} \cdot \frac{d}{dt} \left( \sum_a \frac{\partial \mathbf{r}_{\beta}}{\partial q_a} f_a \right) + o(\varepsilon^2). \quad (6.95)$$

La energía potencial satisface

$$\delta_{\varepsilon} V = \sum_{\beta} \nabla_{\mathbf{r}_{\beta}} V \cdot \delta_{\varepsilon} \mathbf{r}_{\beta},$$

de donde se obtiene

$$\delta_{\varepsilon} V = \varepsilon \sum_{\beta} \nabla_{\mathbf{r}_{\beta}} V \cdot \left( \sum_a \frac{\partial \mathbf{r}_{\beta}}{\partial q_a} f_a \right) + o(\varepsilon^2). \quad (6.96)$$

También será útil expresar los momentos canónicos en términos de las posiciones de las partículas y sus derivadas,

$$p_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_a} = \sum_{\beta} m_{\beta} \dot{\mathbf{r}}_{\beta} \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_{\beta}}{\partial \dot{q}_a}$$

pero debido a la "ley" de cancelación de puntos (3.24) se obtiene

$$p_a = \sum_{\beta} m_{\beta} \dot{\mathbf{r}}_{\beta} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_{\beta}}{\partial q_a}. \quad (6.97)$$

Definiremos el "momento de la transformación" como una combinación lineal de los momentos conjugados a las variables  $q$  pesadas con las cantidades  $f$  que definen a la transformación,

$$P_f(q, \dot{q}, t) \equiv \sum_a p_a f_a = \sum_{\beta, a} m_{\beta} \dot{\mathbf{r}}_{\beta} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_{\beta}}{\partial q_a} f_a. \quad (6.98)$$

Donde hemos usado (6.97). Debido a (6.86) este momento es la cantidad que se conservaría si el Lagrangeano es invariante ante la transformación (6.92).

**Traslaciones:** A continuación veremos que cuando la transformación de coordenadas generalizadas induce una traslación del sistema de partículas entonces el momento de la transformación (6.98) está relacionado con el momento lineal del sistema.

Supongamos que la transformación de coordenadas generalizadas (6.92) produce una traslación infinitesimal del sistema en la dirección  $\hat{e}$  (supuesta constante en un referencial inercial), i.e.,

$$\delta_{\varepsilon} \mathbf{r}_{\beta} = \varepsilon \hat{e} + o(\varepsilon^2). \quad (6.99)$$

Donde  $\varepsilon$  es una distancia infinitesimal. De acuerdo a (6.93) se cumple entonces que

$$\sum_a \frac{\partial \mathbf{r}_{\beta}}{\partial q_a} f_a = \hat{e} \quad \forall \beta. \quad (6.100)$$

Usando esta relación en (6.98) obtenemos que el momento de la transformación es el momento lineal total del sistema en dirección la  $\hat{e}$ ,

$$P_f(q, \dot{q}, t) = \sum_a p_a f_a = \sum_{\beta} m_{\beta} \dot{\mathbf{r}}_{\beta} \cdot \hat{e} = \mathbf{P}_{\text{Total}} \cdot \hat{e}. \quad (6.101)$$

**Comentario 6.3.** Si la traslación del sistema en una dirección  $\hat{e}$  ocurre al variar una única coordenada generalizada, digamos que sea la coordenada  $m$ -ésima, esto es

$$q'_m = q_m + \varepsilon + o(\varepsilon^2) \quad ; \quad f_a = \delta_{a,m} ,$$

entonces de acuerdo a (6.101) el momento conjugado a esta variable es el momento lineal total del sistema en la dirección  $\hat{e}$ ,

$$p_m = \mathbf{P}_{\text{Total}} \cdot \hat{e} .$$

A continuación estudiemos bajo que condiciones se conserva el momento (6.101). Al substituir (6.100) en (6.95) y (6.96) obtenemos como varían las energías cinética y potencial frente a la traslación,

$$\delta_\varepsilon T = o(\varepsilon^2), \quad \delta_\varepsilon V = \varepsilon \sum_{\beta} \nabla_{\mathbf{r}_\beta} V \cdot \hat{e} + o(\varepsilon^2) . \quad (6.102)$$

La energía cinética es invariante frente a traslaciones del sistema. Entonces, de acuerdo al teorema de Noether, basta que la energía potencial sea invariante frente a una traslación del sistema en la dirección  $\hat{e}$  para que el momento lineal total en esa dirección sea una constante de movimiento. Para un sistema cerrado de partículas la homogeneidad del espacio implica que su potencial y por lo tanto su Lagrangeano son invariantes frente a traslaciones por lo cual el momentum total se conserva.

**Rotaciones:** A continuación estudiemos la relación existente entre las rotaciones del sistema y el momento angular.

Vimos con anterioridad, (1.19), que si  $\mathbf{B}'$  es el vector rotado de  $\mathbf{B}$  un ángulo  $d\varphi$  en sentido antihorario (rotación positiva) alrededor de un eje en dirección  $\hat{n}$  entonces a primer orden en  $d\varphi$  se cumple

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B} + d\varphi \hat{n} \times \mathbf{B} .$$

Supongamos ahora que la transformación de coordenadas generalizadas (6.92) produce una rotación antihoraria del sistema, de ángulo  $\varepsilon$ , alrededor de un eje fijo que pasa por el origen y tiene dirección  $\hat{n}$ . De acuerdo a la relación anterior se cumple entonces que

$$\delta_\varepsilon \mathbf{r}_\beta = \varepsilon \hat{n} \times \mathbf{r}_\beta + o(\varepsilon^2) . \quad (6.103)$$

Nótese que estamos cambiando la posición de las partículas sin cambiar el origen de coordenadas (rotación activa). De acuerdo a (6.93) se cumple entonces que

$$\sum_a \frac{\partial \mathbf{r}_\beta}{\partial q_a} f_a = \hat{n} \times \mathbf{r}_\beta . \quad (6.104)$$

En consecuencia el momento de la transformación (6.98) es

$$\begin{aligned} P_f(q, \dot{q}, t) &\equiv \sum_a p_a f_a = \sum_\beta m_\beta \dot{\mathbf{r}}_\beta \cdot (\hat{n} \times \mathbf{r}_\beta) = \left( \sum_\beta m_\beta \mathbf{r}_\beta \times \dot{\mathbf{r}}_\beta \right) \cdot \hat{n} \\ &= \mathbf{L}_O \cdot \hat{n}. \end{aligned} \quad (6.105)$$

Esto es, la componente en dirección  $\hat{n}$  del vector momento angular neto del sistema respecto al origen (vector  $\mathbf{L}_O$ ).

**Comentario 6.4.** Si el sistema rota en sentido antihorario un ángulo  $\varepsilon$  alrededor de un eje que pasa por el origen y tiene dirección  $\hat{n}$  cuando se varía únicamente la coordenada generalizada  $m$ -ésima, esto es

$$q'_m = q_m + \varepsilon + o(\varepsilon^2) \quad ; \quad f_a = \delta_{a,m},$$

entonces de acuerdo a (6.105) el momento conjugado a esta variable es la componente en dirección  $\hat{n}$  del momento angular del sistema respecto al origen,

$$p_m = \mathbf{L}_O \cdot \hat{n}.$$

Veamos ahora bajo que condiciones se conserva el momento (6.105). Debido a (6.104), (6.95) y (6.96) las variaciones de las energías cinética y potencial frente a la rotación son

$$\delta_\varepsilon T = \varepsilon \sum_\beta m_\beta \dot{\mathbf{r}}_\beta \cdot \frac{d}{dt} (\hat{n} \times \mathbf{r}_\beta) + o(\varepsilon^2) = \varepsilon \hat{n} \cdot \sum_\beta m_\beta \dot{\mathbf{r}}_\beta \times \dot{\mathbf{r}}_\beta + o(\varepsilon^2) = o(\varepsilon^2), \quad (6.106)$$

$$\delta_\varepsilon V = \varepsilon \sum_\beta \nabla_{\mathbf{r}_\beta} V \cdot (\hat{n} \times \mathbf{r}_\beta) + o(\varepsilon^2) = \varepsilon \hat{n} \cdot \sum_\beta \mathbf{r}_\beta \times \nabla_{\mathbf{r}_\beta} V + o(\varepsilon^2). \quad (6.107)$$

La energía cinética es invariante frente a rotaciones del sistema y (de acuerdo al teorema de Noether) entonces basta que la energía potencial sea invariante frente a una rotación del sistema alrededor de un eje que pase por el origen para que la componente del momento angular respecto al origen y paralela al eje sea una constante de movimiento. Para un sistema cerrado de partículas la isotropía del espacio conduce a que su Lagrangeano sea invariante frente a rotaciones por lo cual el momento angular neto se conserva.

## 6.7 Algunas técnicas del cálculo de variaciones.

En esta sección desarrollaremos algunas técnicas del cálculo de variaciones que usaremos mas adelante para deducir en una sección posterior la mecánica Lagrangeana y mas tarde aún, en otro capítulo, la mecánica Hamiltoniana a partir de un principio variacional.

Consideremos una funcional  $J$  que depende de un conjunto ordenado de  $n$  funciones variables,

$$\tilde{Y}(x) \equiv [y_1(x), \dots, y_n(x)], \quad \text{con } y_i(x) : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \quad (6.108)$$

dos variables reales  $(x_1, x_2)$  y de la forma

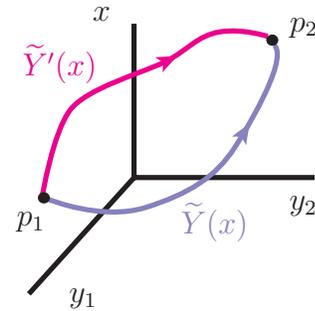
$$J(\tilde{Y}, x_1, x_2) \equiv \int_{x_1}^{x_2} f(\tilde{Y}, \dot{\tilde{Y}}, x) dx \quad (6.109)$$

con

$$\dot{\tilde{Y}}(x) \equiv [\dot{y}_1(x), \dots, \dot{y}_n(x)], \quad \text{tal que } \dot{y}_i(x) \equiv \frac{dy_i}{dx}. \quad (6.110)$$

La función de  $2n+1$  variables  $f$  es fija. Se supone que tanto  $f$  como las funciones  $y_i(x)$  son dos veces derivables. Nótese que dadas las variables  $x_i$  la funcional  $J$  depende de todos los valores que las funciones  $y_i(x)$  tomen en el intervalo  $[x_1, x_2]$ . Estamos interesados en determinar los conjuntos de funciones  $\tilde{Y}(x)$  que conduzcan a un extremal de  $J$  con  $x_1, x_2, \tilde{Y}(x_1)$  y  $\tilde{Y}(x_2)$  fijos.

Este problema puede verse de otra manera. Sea el espacio  $\mathcal{E}_{n+1}$  (de  $n+1$  dimensiones) formado por todos los valores posibles de las  $(n+1)$  - *plas*  $[\tilde{Y}(x), x] = (y_1, \dots, y_n, x)$ . En este espacio el conjunto de funciones  $\tilde{Y}(x)$  representa una curva parametrizada con  $x$ . Del conjunto de todas las curvas con los mismos extremos  $p_1 = (\tilde{Y}(x_1), x_1)$  y  $p_2 = (\tilde{Y}(x_2), x_2)$  queremos determinar cuáles conducen a un extremal de  $J$  (ver figura).



Dada una curva  $\tilde{Y}$  consideremos la familia de curvas

$$\tilde{Y}_\varepsilon(x) = \tilde{Y}(x) + \varepsilon \tilde{m}(x), \quad (6.111)$$

donde  $\varepsilon$  es un parámetro infinitesimal real ( $\varepsilon \ll 1$ ) y las funciones  $\tilde{m}(x)$  son arbitrarias pero con segunda derivada continua. Definimos la variación infinitesimal de la curva original como

$$\delta\tilde{Y}(x) \equiv \tilde{Y}_\varepsilon(x) - \tilde{Y}(x) = \varepsilon \tilde{m}(x), \quad (6.112)$$

nótese que  $\delta\tilde{Y}(x)$  es función de  $\varepsilon$  y del conjunto de funciones  $\tilde{m}$  pero no suele indicarse explícitamente. Cuando se habla de una variación arbitraria  $\delta\tilde{Y}$  se está pensando en un cambio arbitrario en  $\varepsilon$  o en el conjunto de funciones  $\tilde{m}$ . Se cumple que

$$\delta\dot{\tilde{Y}}(x) \equiv \dot{\tilde{Y}}_\varepsilon(x) - \dot{\tilde{Y}}(x) = \varepsilon \dot{\tilde{m}}(x) = \frac{d}{dx} (\delta\tilde{Y}(x)). \quad (6.113)$$

A continuación evaluemos la variación del funcional  $J$  inducida por la variación  $\delta\tilde{Y}$ .

$$\begin{aligned}\delta J &\equiv J[\tilde{Y}_\varepsilon, x_1, x_2] - J[\tilde{Y}, x_1, x_2] \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \delta f dx = \int_{x_1}^{x_2} \sum_i \left[ \frac{\partial f}{\partial y_i} \delta y_i + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \delta \dot{y}_i \right] dx + \text{orden}(\varepsilon^2),\end{aligned}$$

integrando por partes llegamos a la siguiente identidad

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \sum_i \left[ \frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \right) \right] \delta y_i dx + \sum_i \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \delta y_i \Big|_{x_1}^{x_2} + \text{orden}(\varepsilon^2). \quad (6.114)$$

Nuestro problema de variaciones original requiere que las variaciones se anulen en los extremos,  $\delta y_i(x_1) = \delta y_i(x_2) = 0$ , y esto impone a las funciones  $\tilde{m}$  la restricción  $\tilde{m}(x_1) = \tilde{m}(x_2) = 0$ . Con esta condición la variación (6.114) se convierte en

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \sum_i \left[ \frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \right) \right] \delta y_i dx + \text{orden}(\varepsilon^2). \quad (6.115)$$

Esta última variación puede escribirse todavía de otra forma. Como

$$\delta J = J[\tilde{Y}_\varepsilon, x_1, x_2] - J[\tilde{Y}, x_1, x_2] = \varepsilon \left[ \frac{d}{d\varepsilon} J(Y_\varepsilon, x_1, x_2) \right] \Big|_{\varepsilon=0} + o(\varepsilon^2) \quad (6.116)$$

entonces (6.115) toma la forma

$$\frac{d}{d\varepsilon} J(\tilde{Y}_\varepsilon, x_1, x_2) \Big|_{\varepsilon=0} = \int_{x_1}^{x_2} \sum_i \left[ \frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \right) \right] m_i dx. \quad (6.117)$$

Para hallar las ecuaciones que debe satisfacer la curva que hace extremal a  $J$  usaremos el teorema fundamental del cálculo de variaciones.

### Comentario 6.5 (Teorema fundamental del cálculo de variaciones).

Sea  $\tilde{F}(x)$  un conjunto de funciones integrables que satisfacen

$$\int_{x_1}^{x_2} \sum_i \tilde{F}_i(x) \cdot \tilde{m}_i(x) dx = 0 \quad (6.118)$$

para cualquier conjunto de funciones integrables  $\tilde{m}(x)$  que satisfagan  $\tilde{m}(x_1) = \tilde{m}(x_2) = 0$  entonces  $\tilde{F}(x) = 0 \forall x \in [x_1, x_2]$ .

Que la curva, o conjunto de funciones,  $\tilde{Y}$  sea un extremal de  $J$  con extremos fijos significa que al evaluar en  $\tilde{Y}$  la ecuación anterior esta debe anularse para cualquier  $\tilde{m}$  que se anule

en  $x_1$  y  $x_2$  y debido al teorema fundamental del cálculo de variaciones se cumple que  $\tilde{Y}$  es un extremal de  $J$  (con bordes fijos) si y sólo si

$$\Lambda_{y_i} f \equiv \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \right) - \frac{\partial f}{\partial y_i} = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad \text{y} \quad \forall x \in [x_1, x_2]. \quad (6.119)$$

A continuación trataremos otro problema. Nuevamente deseamos hallar una curva  $\tilde{Y}$  que sea un extremal de  $J$  con extremos fijos pero ahora sujeta a los vínculos

$$\phi_I(\tilde{Y}(x), x) = 0 \quad ; \quad I = 1, \dots, K < n. \quad (6.120)$$

Una variación en la curva  $\tilde{Y}$  a extremos fijos induce una variación en el funcional  $J$  dada por (6.115) pero en esta ocasión las variaciones  $\delta y_i$  no son independientes y no podemos usar, por ahora, el principio fundamental del cálculo variacional. Debido a los vínculos las variaciones  $\delta y_i$  están sujetas a las condiciones

$$\delta \phi_I = \tilde{\nabla} \phi_I \cdot \delta \tilde{Y} = 0 \quad ; \quad I = 1, \dots, K. \quad (6.121)$$

Donde las componentes de  $\tilde{\nabla} \phi_I$  son las derivadas parciales de  $\phi_I$  respecto a las funciones  $y_i$ . Supondremos que los vectores  $\tilde{\nabla} \phi_I$  existen y que los vínculos son independientes en el sentido de que estos vectores son linealmente independientes. La condición (6.121) entonces indica que  $\delta \tilde{Y}$  pertenece al sub-espacio ortogonal al sub-espacio generado por los  $\tilde{\nabla} \phi_I$ . Podemos resolver los vínculos (6.120) introduciendo coordenadas generalizadas  $\{q_b, b = 1, \dots, n - K\}$ . Entonces  $\tilde{Y} = \tilde{Y}(q(x), x)$  y su variación compatible con los vínculos es

$$\delta \tilde{Y} = \sum_b \frac{\partial \tilde{Y}}{\partial q_b} \delta q_b, \quad (6.122)$$

donde las variaciones  $\delta q_b$  son independientes. Al sustituir esta variación en (6.115) se obtiene

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \sum_{b,i} \left[ \frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \right) \right] \frac{\partial y_i}{\partial q_b} \delta q_b dx + \text{orden}(\varepsilon^2) \quad (6.123)$$

y usando el teorema fundamental del cálculo de variaciones obtenemos que la condición necesaria y suficiente para que  $\tilde{Y}$  sea uno de los extremales buscados es

$$\sum_i \left[ \frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \right) \right] \frac{\partial y_i}{\partial q_b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_i (\Lambda_{y_i} f) (\delta \tilde{Y})_i = 0, \quad (6.124)$$

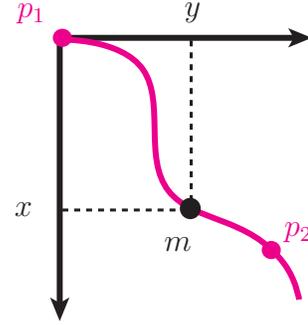
donde  $\delta \tilde{Y}$  es un vector arbitrario del sub-espacio ortogonal al espacio vectorial generado por los  $\tilde{\nabla} \phi_I$ . En consecuencia esta condición significa que el vector  $\Lambda f$  es una combinación lineal de los vectores  $\tilde{\nabla} \phi_I$ , i.e.,

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{y}_i} \right) - \frac{\partial f}{\partial y_i} = \sum_{I=1}^K \lambda_I \frac{\partial \phi_I}{\partial y_i} \quad ; \quad i = 1, \dots, n. \quad (6.125)$$

Este conjunto de  $n$  ecuaciones junto con los  $K$  vínculos (6.120) determinan a los multiplicadores  $\lambda_I(x)$  y al conjunto de funciones  $y_i$  extremales del funcional  $J$ .

### Ejemplo 6.4 (Braquistócrona).

Una cuenta de masa  $m$  desliza sin fricción por un alambre contenido en un plano vertical. Hallaremos qué forma debe tener el alambre para que, partiendo del reposo, sea mínimo el tiempo empleado por la partícula en ir entre dos puntos  $p_1$  y  $p_2$  arbitrarios pero fijos. La curva descrita por el alambre se denomina braquistócrona. Tomaremos los ejes cartesianos como se indican en la figura y las coordenadas de los dos puntos serán  $p_1 = (0, 0)$  y  $p_2 = (x_2, y_2)$ .



A partir de la conservación de la energía hallaremos una expresión integral para el tiempo que tarda la cuenta en ir entre los dos puntos por una curva cualquiera. Luego usando el cálculo de variaciones obtendremos aquella que proporcione el menor tiempo.

De la conservación de la energía despejamos la rapidez de la cuenta,

$$E = \frac{1}{2}mV^2 - mgx = 0 \quad \Rightarrow \quad V = \sqrt{2gx} = \frac{dl}{dt},$$

con  $dl$  el elemento de longitud. Si parametrizamos la curva con la variable  $x$  el elemento de longitud y el tiempo que tarda la cuenta en recorrerlo se escriben como

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + (y')^2}dx \quad \text{con} \quad y' \equiv \frac{dy}{dx} \quad (6.126)$$

$$dt = \frac{dl}{V} = f(y, y', x)dx \quad \text{con} \quad f(y, y', x) \equiv \sqrt{\frac{1 + (y')^2}{2gx}}. \quad (6.127)$$

Dada una trayectoria  $y = y(x)$  entre los dos puntos  $p_1$  y  $p_2$  el tiempo que tarda la cuenta en recorrerla es

$$t_{12} = \int dt = \int_{x_1=0}^{x_2} f(y, y', x) dx \quad (6.128)$$

y no depende de la masa de la cuenta. La trayectoria que hace extremal al tiempo  $t_{12}$  (en este caso un mínimo) satisface la ecuación de lagrange  $\Lambda_y f = 0$ . Esta ecuación puede pensarse como la ecuación de un sistema dinámico con lagrangeano  $f$  y la variable  $x$  jugando el papel del tiempo. Siguiendo esta analogía nótese que la variable  $y$  es cíclica y por lo tanto se conserva su momento,

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = \text{cte} \quad \Rightarrow \quad \frac{[1 + (y')^2]^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2gx}} y' = \text{cte} \quad \Rightarrow \quad (y')^2 = \text{cte} x [1 + (y')^2]$$

la última constante la escribiremos como  $cte = 1/(2a)$  y obtenemos

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{x}{2a-x}. \quad (6.129)$$

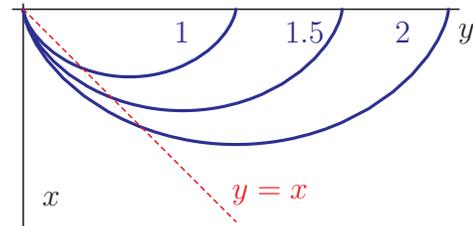
Para resolver esta ecuación conviene hacerlo de forma paramétrica,

$$\begin{aligned} x = a[1 - \cos\theta] &\Rightarrow \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = \left(\frac{dy}{dx} a \operatorname{sen}\theta\right)^2 = a^2 \frac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta} \operatorname{sen}^2\theta \\ &\Rightarrow \frac{dy}{d\theta} = \pm a(1 - \cos\theta) \Rightarrow y = \pm a(\theta - \operatorname{sen}\theta) + cte, \end{aligned}$$

la solución con signo negativo se obtiene de que tiene el signo positivo cambiando de signo a  $\theta$  así que podemos desecharla sin perder generalidad. La constante la obtenemos tomando  $x = 0$  y  $y = 0$  en  $\theta = 0$ . Finalmente obtenemos que la versión paramétrica de la braquistócrona es

$$\begin{aligned} x &= a[1 - \cos\theta] \\ y &= a[\theta - \operatorname{sen}\theta]. \end{aligned} \quad (6.130)$$

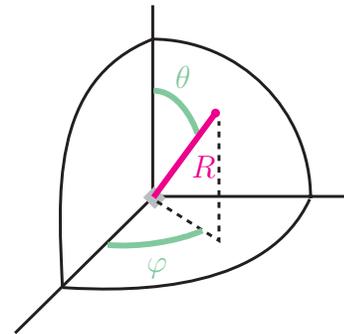
Se trata de la ecuación paramétrica de una cicloide. La gráfica a la derecha muestra tres braquistócronas con  $a = 1, 1.5, 2$  y  $\theta \in [0, 2\pi]$ , como referencia se muestra la recta  $y = x$ .



### Ejemplo 6.5 (Geodésicas de una esfera).

Dados dos puntos arbitrarios sobre una superficie  $S$  se denomina geodésica de la superficie entre esos dos puntos a la curva (o curvas) sobre  $S$  que une a los dos puntos y tiene la menor longitud. En este ejemplo hallaremos las geodésicas de una esfera de radio  $R$ .

Para identificar los puntos sobre la esfera usaremos los ángulos  $\theta$  y  $\varphi$  usuales de coordenadas esféricas.



Describiremos una curva sobre la superficie como una función  $\theta(\varphi)$  y hallaremos una expresión integral para su longitud, luego usando el cálculo de variaciones encontraremos la curva con menor longitud dejando los extremos fijos.

El elemento de longitud en esféricas es

$$dl = |d\mathbf{r}| = |dr \hat{u}_r + r d\theta \hat{u}_\theta + r \operatorname{sen}\theta d\varphi \hat{u}_\varphi| = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \operatorname{sen}^2\theta d\varphi^2}. \quad (6.131)$$

Para el caso particular de una curva sobre la esfera ( $r = R = \text{cte}$ ) y tomando como parámetro independiente a  $\varphi$  el elemento de longitud toma la forma

$$dl = R [d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\varphi^2]^{\frac{1}{2}} = R \left[ \text{sen}^2\theta + \left( \frac{d\theta}{d\varphi} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} d\varphi. \quad (6.132)$$

Dada una curva  $\theta(\varphi)$  sobre la esfera que conecta dos puntos  $(\varphi_1, \theta(\varphi_1))$  y  $(\varphi_2, \theta(\varphi_2))$  su longitud es

$$l = \int d\varphi dl = R \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi f\left(\theta, \frac{d\theta}{d\varphi}, \varphi\right) \quad (6.133)$$

con

$$f(\theta, \theta', \varphi) \equiv \left[ \text{sen}^2\theta + \left( \frac{d\theta}{d\varphi} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad ; \quad \theta' \equiv \frac{d\theta}{d\varphi}. \quad (6.134)$$

La curva con mínima longitud a extremos fijos satisface ecuaciones de Lagrange,  $\Lambda_{\theta} f = 0$ . Podemos imaginar un problema mecánico equivalente de Lagrangeano  $f$  y con la variable  $\varphi$  jugando el papel del tiempo. Como  $f$  no depende explícitamente de  $\varphi$  (del tiempo) la función energía se conserva,

$$\begin{aligned} \text{cte} = h &\equiv \frac{\partial f}{\partial \theta'} \theta' - f = (\theta')^2 [\text{sen}^2\theta + (\theta')^2]^{-\frac{1}{2}} - [\text{sen}^2\theta + (\theta')^2]^{\frac{1}{2}} \\ &\Rightarrow h \sqrt{\text{sen}^2\theta + (\theta')^2} = (\theta')^2 - [\text{sen}^2\theta + (\theta')^2] \Rightarrow h^2 [\text{sen}^2\theta + (\theta')^2] = \text{sen}^4\theta \\ &\Rightarrow (\theta')^2 = \text{sen}^2\theta [a^2 \text{sen}^2\theta - 1] \Rightarrow d\varphi = \frac{d\theta}{\text{sen}\theta [a^2 \text{sen}^2\theta - 1]^{\frac{1}{2}}} \quad \text{con } a = 1/h \\ &\Rightarrow \varphi = \int \frac{d\theta}{\text{sen}\theta \sqrt{a^2 \text{sen}^2\theta - 1}} = \arccos \left[ \frac{\cot \theta}{\sqrt{a^2 - 1}} \right] + \varphi_0, \end{aligned}$$

finalmente obtenemos que la ecuación de la geodésica es

$$\cot \theta = \sqrt{a^2 - 1} \cos(\varphi - \varphi_0), \quad (6.135)$$

con  $a$  una constante. Para ver con claridad de qué curva se trata escogamos el eje  $z$  de tal forma que los dos puntos fijos satisfagan  $\theta_1 = \theta_2 = \pi/2$  entonces  $\cot \theta_1 = \cot \theta_2 = 0$  y (6.135) conduce a

$$0 = \sqrt{a^2 - 1} \cos(\varphi_1 - \varphi_0) = \sqrt{a^2 - 1} \cos(\varphi_2 - \varphi_0)$$

como  $\varphi_1 \neq \varphi_2$  entonces  $a^2 = 1$  y  $\theta = \pi/2 \quad \forall \varphi$ . Esto significa que las geodésicas son arcos de circunferencia con centro en el centro de la esfera.

---

## 6.8 Principio de Hamilton. La acción

En ésta muy corta sección enunciamos el principio de Hamilton. Usualmente en mecánica clásica no se toma como un principio sino que se deduce de las ecuaciones de Lagrange que a su vez se dedujeron de las leyes de Newton. Su importancia radica esencialmente en que este principio se puede exportar a otras áreas de la física distintas a la mecánica clásica, especialmente a teoría de campos.

Dado un sistema dinámico con Lagrangeano  $L(q, \dot{q}, t)$  definimos la acción  $S$  como un funcional dado por

$$S(q, t_1, t_2) \equiv \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt. \quad (6.136)$$

La acción es una función que depende de curvas sobre la variedad de configuración, curvas parametrizadas con el tiempo y en el intervalo  $t \in [t_1, t_2]$ .

Dado un sistema con Lagrangeano  $L(q, \dot{q}, t)$  y  $K$  vínculos holónomos  $g_J(q, t) = 0$  hemos visto que su evolución es descrita por el siguiente conjunto de ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_b} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_b} &= \sum_{J=1}^K \lambda_J \frac{\partial g_J}{\partial q_b} \\ g_J(q, t) &= 0 \quad ; \quad J = 1, \dots, K. \end{aligned} \quad (6.137)$$

De acuerdo a lo visto en la sección anterior una trayectoria  $q(t)$  es solución de estas ecuaciones si y solo si es un extremal de (6.136) con extremos fijos. Esto es lo que se conoce como el principio de Hamilton, pero enunciémoslo sólo en palabras:

### Principio de Hamilton.

De todas las trayectorias posibles (compatibles con las ligaduras si el sistema es holónimo) que puede seguir un sistema mecánico para desplazarse de un punto a otro del espacio de configuración en un intervalo de tiempo determinado, la trayectoria seguida es aquélla que minimiza (extremiza realmente) la acción.

Se puede demostrar que una condición necesaria pero no suficiente para que la trayectoria sea un mínimo de  $S$  es que la matriz Hessiana tenga traza positiva,

$$\sum_a \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_a \partial \dot{q}_a} \geq 0. \quad (6.138)$$

En la sección 4.2 hablamos sobre esta matriz. Esta condición (condición de Legendre) se satisface para las funciones de Lagrange usuales de la forma  $L = T - V$  con  $T = \frac{1}{2} \sum m_\alpha |\dot{\mathbf{X}}_\alpha|^2$  y  $V$  a lo sumo dependiendo linealmente de las velocidades generalizadas  $\dot{q}$ .