Práctico 1
Fundamentos de la Mecánica

1. Demuestre que para una partícula de masa constante la ecuación del movimiento implica la siguiente ecuación diferencial para la energía cinética

$$\frac{dT}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$$

mientras que si la masa varía con el tiempo la ecuación correspondiente es:

$$\frac{d(mT)}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{p}$$

2. Demuestre que la magnitud R del vector posición del centro de masa con origen arbitrario viene dada por la ecuación

$$M^2R^2 = M \sum_j m_j r_j^2 - \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} m_i m_j r_{ij}^2$$

3. Un sistema de dos partículas obedece las ecuaciones de movimiento

$$M\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}$$

$$\frac{d\mathbf{L}_0}{dt} = \mathbf{M}_0$$

A partir de las ecuaciones individuales de movimiento de cada partícula pruebe que las fuerzas internas entre ellas satisfacen las leyes débil y fuerte de acción y reacción. Ver que puede generalizarse para un número cualquiera de partículas

4. Verifique si la fuerza $\mathbf{F} = yz\mathbf{i} + zx\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$ es conservativa o no.

5. Sea $\widetilde{X} \equiv (\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N)$ una solución de las ecuaciones de movimiento de un sistema de N partículas, con K vínculos holónomos $f_I = 0$ y fuerzas reactivas que no realizan trabajo virtual. Demuestre que la potencia total de las fuerzas reactivas:

$$P = \widetilde{R} \cdot \dot{\widetilde{X}} \equiv \sum_{\alpha=1}^{N} \mathbf{R}_\alpha \cdot \dot{\mathbf{r}}_\alpha$$

satisface: $P = \displaystyle\sum_{I=1}^{K} \lambda_I \frac{\partial f_I}{\partial t}$

Nota: El trabajo neto y no-virtual de las fuerzas reactivas sólo puede ser no nulo si los vínculos dependen explícitamente del tiempo.

6. 1) Dada una función $F(q, t)$ que no depende de las velocidades generalizadas, demuestre que:

$$\frac{\partial \dot{F}}{\partial \dot{q}_a} = \frac{\partial F}{\partial q_a}$$

2) Dada una función $F(q, \dot{q}, t)$, demuestre que:

$$\frac{\partial \dot{F}}{\partial q_a} = \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial q_a}$$

($\dot{F}$ indica la derivada total, $\frac{dF}{dt}$).

7. Demuestre que la energía de un sistema de partículas $T = \sum_\alpha \frac{1}{2} m_\alpha |\dot{\mathbf{r}}_\alpha|^2$, se escribe en función de las coordenadas generalizadas como:

$$T = T_2 + T_1 + T_0$$

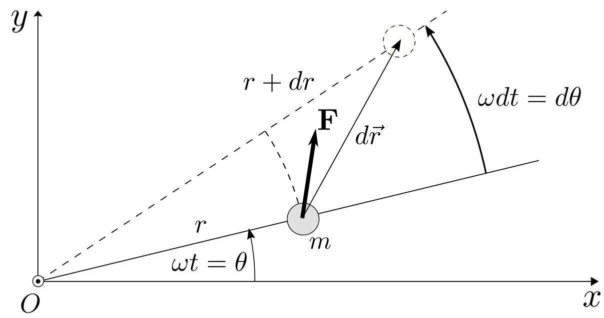
con:

$$T_2 = \sum_a \sum_b \frac{1}{2} g_{ab}(q,t) \dot{q}_a \dot{q}_b \qquad T_1 = \sum_a b_a(q,t) \dot{q}_a \qquad T_0 = \sum_\alpha m_\alpha \left| \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial t} \right|^2$$

$$g_{ab}(q,t) = \sum_\alpha m_\alpha \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial q_a} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial q_b} \qquad b_a(q,t) = \sum_\alpha m_\alpha \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial q_a}$$

El subíndice en T_i indica el grado de homogeneidad de la función en su dependencia con las velocidades generalizadas.

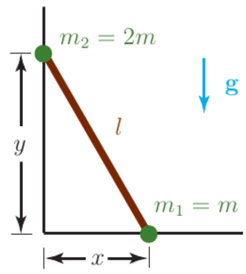
8. La barra rígida de la figura está obligada a rotar en el plano xy con velocidad angular ω constante. Una partícula de masa m se mueve sin rozamiento sobre la barra y sobre ella hay aplicada una fuerza externa $\mathbf{F}$.



a. Escriba un desplazamiento virtual y uno real para m.

b. Escriba las ecuaciones de d'Alembert.

9. Las dos esferitas de la figura están obligadas a moverse sin roce sobre rieles mientras están unidas por una varilla sin masa de longitud l. El riel de la esferita 1 es horizontal y lo tomaremos como eje x y el de la esferita 2 es vertical y se toma como eje y. El origen es el punto de corte de los rieles.



a. Explique cuántos grados de libertad tiene el sistema. Escoja coordenadas generalizadas q_a y escriba en función de ellas y de la base cartesiana los vectores posición de las partículas $\mathbf{r}_1$ y $\mathbf{r}_2$.

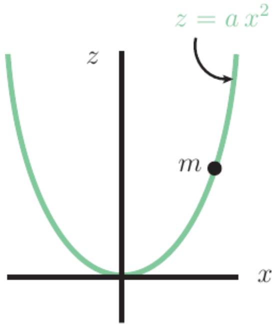
b. La posición del sistema se define como un vector en $\mathbb{R}^4$ dado por $\widetilde{X} = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$. Calcule los vectores $\frac{\partial \widetilde{X}}{\partial q_a}$ y expréselos en función de las variables x e y.

c. A partir de las ecuaciones de d'Alembert demuestre que:

$$A y\ddot{x} + B x\ddot{y} + Cx + Dy + E = 0$$

donde A, B, C, D y E son constantes a determinar.

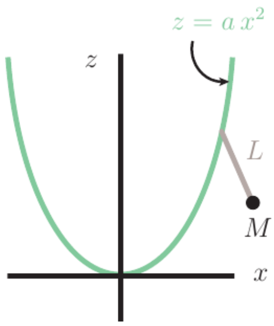
10. La cuenta de la figura desliza sin rozamiento por el alambre en forma de parábola. El eje z es vertical.



a. Escoja coordenadas generalizadas y escriba las energías cinética y potencial en términos de ellas.

b. La cuenta se coloca inicialmente en reposo en el punto con $x = x_0$. Halle el vector velocidad de la partícula cuando se encuentre en un punto x cualquiera tal que $|x| \leq x_0$.

11. El punto de suspensión de un péndulo desliza libremente por un alambre en forma de parábola de ecuación $z = ax^2$, donde el eje z es vertical. El péndulo tiene longitud L, está obligado a moverse en el plano xz y en su extremo inferior está adherida una partícula de masa M.



a. Determine cuantos grados de libertad tiene el sistema (explique con detalle). Represente gráficamente el espacio de configuración Q del sistema. ¿Es Q una porción del plano xz?

b. Escoja coordenadas generalizadas y escriba las ecuaciones de d'Alembert (no integre las ecuaciones).

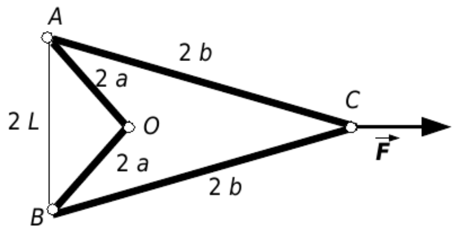
12. Dos partículas de masas m_1 y m_2 se hallan contenidas en el plano horizontal, fijas al perímetro de una circunferencia de radio variable en el tiempo, dado por una función $R(t)$ conocida. Las partículas se hallan unidas entre sí por una varilla rígida de masa y diámetro despreciables y de longitud L.

    a. ¿Cuántos grados de libertad tiene el sistema?

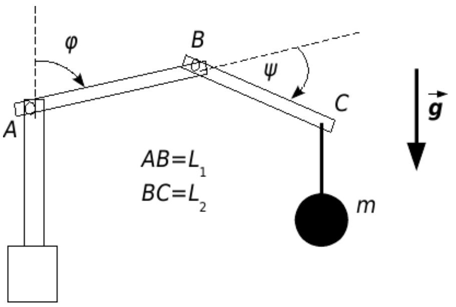
    b. Calcule un desplazamiento virtual y uno real para cada una de las partículas.

    c. Escriba las ecuaciones de los vínculos, y en caso de ser un sistema holónomo, halle un conjunto de coordenadas generalizadas independientes y exprese sus resultados en función de las mismas.

13. Dos barras iguales y sin masa OA y OB, de longitud $2a$, articulan en el punto fijo O. Sus extremos A y B están unidos, respectivamente, a dos barras iguales sin masa, AC y BC, de longitud $2b$, las cuales se unen entre sí en un punto de articulación C. Todas las articulaciones son cilíndricas y lisas. Además un hilo ideal de largo $2L$ une los puntos A y B. Si se aplica una fuerza F horizontal en C, según se muestra en la figura, calcule la tensión del hilo utilizando el Principio de los Trabajos Virtuales.



14. La grúa de la figura sostiene una masa m por medio de dos brazos AB y BC de masa despreciable y longitudes respectivas L_1 y L_2. Las articulaciones en A y B tienen resortes de torsión que ejercen torques $T_A = -k\varphi$ y $T_B = -k\psi$. Halle la condición que deben verificar las posiciones de equilibrio del sistema a partir del Principio de los Trabajos Virtuales. ¿Es posible una configuración de equilibrio con $\psi = 0$ y $\varphi \neq 0$? ¿y una con el brazo AB horizontal ($\varphi = \pi/2$)?



15. Las masas m_1 y m_2 están suspendidas por hilos inextensibles de la barra B. La barra rota libremente en torno a un eje horizontal y su momento de inercia respecto a ese eje es I. Asumiendo que todos los movimientos están restringidos al plano de la hoja, determine los grados de libertad y halle una expresión para la energía cinética