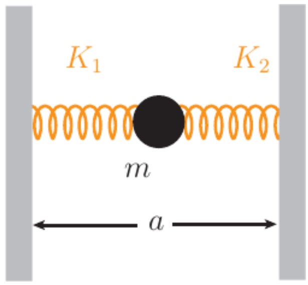
Práctico 4
Conservación

1. Una partícula de masa m se mueve en una dimensión bajo la acción de dos resortes de constantes elásticas K_1 y K_2 y longitudes naturales nulas.



a. Use como coordenada generalizada q la posición de la partícula respecto a algún punto fijo. Halle el lagrangeano del sistema $L = L(q, \dot{q}, t)$.

b. Halle $q(t)$, la solución general de las ecuaciones de movimiento.

c. Considere la transformación de coordenadas:

$$q \to Q = q + \epsilon \cos(\omega t + \phi) \equiv q + \delta_\epsilon q$$

donde $\omega^2 = (K_1 + K_2)/m$ y ϵ es infinitesimal. Demuestre que es una simetría del lagrangeano, i.e.

$$\frac{\partial}{\partial \epsilon} L\left(q + \delta_\epsilon q, \dot{q} + \delta_\epsilon \dot{q}, t\right)|_{\epsilon=0} = \frac{d}{dt} G\left(q, t\right)$$

Halle la función $G(q, t)$.

d. De acuerdo al teorema de Noether existe una constante de movimiento $\Gamma(q, \dot{q}, t)$ asociada a la simetría anterior. Hállela.

e. Introduzca la solución hallada en b) en la constante de movimiento $\Gamma(q, \dot{q}, t)$ y compruebe que efectivamente es una constante de movimiento.

2. Considere el lagrangeano de un solo grado de libertad $L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - mgx$, que representa, por ejemplo, a una partícula que cae.

a. Demuestre que la transformación de coordenadas $x \to x' = x + \epsilon$ es una simetría del lagrangeano.

b. Encuentre la constante de movimiento asociada a esta simetría.

c. Use la constante de movimiento para resolver el movimiento y obtener $x(t)$.

3. Una partícula se mueve en el espacio bajo la influencia de un potencial que en coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z) tiene la dependencia $V = V(\rho, k\phi + z)$, con k una constante con dimensiones de longitud.

a. Encuentre una simetría del lagrangeano y la constante del movimiento asociada.

b. Halle al menos una constante del movimiento más.