Mecánica Analítica 2024

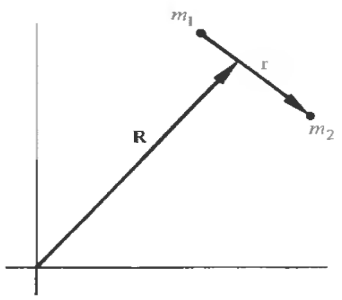
Tutorial de Movimiento central

Estos apuntes son una simple guía para ir que vaya desarrollando el tema paso por paso.

1. Motivación. El problema del movimiento de los planetas viene de la antigüedad (Ptolomeo, Copérnico). En los siglos XV y XVI fue uno de los primeros problemas que marcó un triunfo notorio de la Física como disciplina moderna. J. Kepler postuló en 1609 las leyes conocidas actualmente como leyes de Kepler sobre el movimiento de los planetas en base a observaciones de Tycho Brahe. Newton demostró que las leyes a las que están sometidos los cuerpos celestes son las mismas que las que rigen para los objetos terrestres. También demostró a partir de las ecuaciones que una fuerza inversa al cuadrado de la distancia conducía a órbitas elípticas (y otras cónicas). Obviamente para la astronomía el problema de dos cuerpos o movimiento central está en la base de todo la mecánica celeste.

También en el electromagnetismo tiene importantes aplicaciones. Por ej. en el experimento sobre dispersión de partículas alfa por núcleos atómicos de Rutherford se demostró la existencia del núcleo atómico a principio del siglo XX. En este experimento se usa el formalismo del movimiento central para el cálculo de las secciones eficaces y de los ángulos de dispersión.

2. Primer acto: formulación del problema. Consideramos dos partículas de masa m1 y m2 (nos olvidamos del resto del universo).



Definimos **R** como la posición del centro de masas y **r** como el vector que va de la masa 1 a la 2.

Consideramos que las partículas interactúan por medio de un potencial que depende solo del vector $\vec{r}$ y eventualmente de su derivada $\dot{\vec{r}}$.

¿Cuántos grados de libertad tiene el problema?

¿Cómo elegiría las coordenadas generalizadas?

Escriba el Lagrangiano genéricamente:

Ayuda: la energía cinética puede expresarse como la energía cinética del movimiento del centro de masas más la energía cinética del movimiento alrededor del centro de masas. Va a necesitar expresar la posición de las partículas relativas al centro de masas.

3. Problema reducido. El problema antes formulado es muy complicado, tenemos demasiados grados de libertad. Usando el hecho que tenemos varias coordenadas cíclicas vamos a llevar el problema a un problema equivalente para **un solo cuerpo.** Esto lo vamos a hacer en dos etapas.

<u>Primera etapa: Elimine los grados de libertad relacionados con la posición del centro de masas.</u>

En esta primera etapa siempre suponiendo que el potencial depende del vector **r** (y eventualmente de sus derivadas temporales), el sistema es invariante frente a traslaciones en cualquier dirección. Muestre como eliminar 3 de los grados de libertad, en consecuencia, formule el problema en términos de un Lagrangiano con **3 grados de libertad.** Muestre la receta para pasar de un sistema a otro.

Calcule la masa equivalente (o masa reducida) que tendría la partícula del problema equivalente.

Lagrangiano:

Masa:

<u>Segunda etapa: Ecuaciones de movimiento y constantes de movimiento.</u>

Ahora suponemos que el potencial depende *solo de la distancia entre las partículas r* (no depende de la dirección, ni de la velocidad relativa). Muestre que dado que el sistema tiene simetría esférica (o invariancia frente a rotaciones arbitrarias) el momento angular total

$$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}$$

se conserva. ¿Cuántas constantes de movimiento se deducen a partir de esta observación?

Muestre ahora que el movimiento se puede restringir a un plano. (¿En qué casos particulares esto no es cierto?) ¿Cuántas de estas constantes de movimiento uso en este punto? ¿y cuántas me quedan?

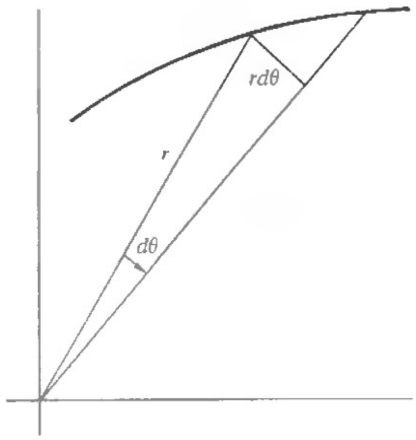
Muestre que el nuevo Lagrangiano es $L=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2)-V(r)$

Tiene que tener claro qué es cada cosa en esta ecuación y cómo se relaciona con el problema original (grados de libertad, coordenadas generalizadas,...). Busque un ejemplo.

Seguimos adelante. Una vez que tenemos el Lagrangiano obtenemos las ecuaciones de movimiento (al fin!!):

Primero trabajamos con la ecuación para el ángulo. Recuerde uno de los lemas del curso ("si es constante, no derivo"). Pruebe que: $m r^2 \dot{\theta} = l = cte$

Hacemos un paréntesis para ver una consecuencia de esta última ecuación (relacionada con la 2da. Ley de Kepler, que dice que velocidad con el radio vector recorre un área dada es constante). ¿Qué consecuencia importante tiene?



$$dA = \frac{1}{2} r (r\, d\theta),$$

Muestre que a partir de la ecuación se deduce la 2da. Ley de Kepler.

Ahora escriba la ecuación de movimiento para la coordenada **r:**

Interprétela.

Luego use la ecuación de conservación del momento angular (la ecuación de movimiento para el ángulo) y exprese una ecuación diferencial **solo para r.** Demuestre que $m\ddot{r} - \frac{l^2}{m r^3} = f(r)$

con $-\frac{\partial V}{\partial r} = f(r)$

¿Puede resolverla?

Pruebe multiplicar por r punto e integrar en el tiempo, si hizo todo bien, debería obtener

$$E=\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2\right)+V(r)$$

Ya casi estamos. Si nos hubiésemos acordado que la energía también se conserva podríamos haber llegado con más facilidad a la misma ecuación.

Ahora si vamos a las *leyes horarias*. Escriba, formalmente (en términos de integrales), t(r), y luego deje planteado en términos genéricos r(t) y theta(t).

Muestre como se llega al siguiente resultado: $t=\int_{r_0}^{r}\frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E-V-\frac{l^2}{2mr^2}\right)}}$ $\theta=l\int_0^t\frac{dt}{mr^2(t)}+\theta_0$

Lo logró?

En caso afirmativo se merece un premio. Alto! Todavía falta analizar cuáles son las constantes de movimiento. En el problema con 2 grados de libertad, r y theta, tenemos 2 ecuaciones de 2do orden, entonces deberíamos tener 4 constantes de integración. ¿Cuáles son?

Los pasos siguientes son estudiar las consecuencias de las ecuaciones que encontramos recién. Las soluciones no son fáciles de interpretar. Vamos a hacer dos cosas a) primero estudiar cualitativamente el problema equivalente en 1 dimensión. b) luego limitarnos a una forma particular del potencial y encontrar la ecuación de la órbita para el problema de Kepler.

<u>Tercera etapa: problema uni-dimensional equivalente.</u> Estudiamos el problema en términos de r y r punto. Prueba que podemos formular un problema con la siguiente fuerza o el siguiente potencial

$$f'=f+\frac{l^2}{mr^3} \quad , \quad V'=V+\frac{l^2}{2mr^2}$$

Explique la receta para pasar de un sistema a otro. Estudie gráficamente el caso $V=\frac{-k}{r}$

y también este otro $f=-kr$, $V=\frac{1}{2}kr^2$

4. Ecuación de la órbita para el problema de Kepler. Ahora vamos a considerar el problema de Kepler, es decir un potencial del tipo $V=\frac{-k}{r}$.

Partimos de las ecuaciones de movimiento $m\ddot{r}-\frac{l^2}{mr^3}=f(r)$ y $mr^2\dot{\theta}=l=cte$

a) Muestre que $\frac{d}{dt}=\frac{l}{mr^2}\frac{d}{d\theta}$ y $\frac{d^2}{dt^2}=\frac{l^2}{m^2}\frac{1}{r^2}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r^2}\frac{d}{d\theta}\right)$ y escriba la ecuación de movimiento para r en términos de la derivadas respecto a θ . En la ecuación resultante interesante el cambio de variable $u=\frac{1}{r}$ ya que $u'=\frac{-1}{r^2}\frac{dr}{d\theta}$.

Escriba entonces la ecuación para .

Muestre que para $V=\frac{-k}{r}=-ku$ la ecuación anterior resulta $u''+u=\frac{-m}{l^2}\frac{d}{du}V(1/u)=\frac{mk}{l^2}$

b) Encuentre la solución $u(\theta)$ a la ecuación diferencial anterior. Las constantes de integración se pueden elegir de muchas formas pero nos interesa escribirlas como

$u=\frac{mk}{l^2}\left(1+e\cos(\theta-\theta_0)\right)$ donde e y θ_0 son constantes de integración.

c) Deshaga el cambio de variable $u=\frac{1}{r}$ para obtener $r(\theta)$ y muestre que las soluciones son cónicas. Determine el tipo de cónica según los valores de los parámetros.