Método de Hamilton Jacobi

Motivación: buscamos una transformación canónica que nos lleve a un sistema donde todas variables canónicas son constantes.

Partimos de un sistema con coordenadas y momentos canónicos $q_1,\dots,q_n,p_1,\dots,p_n$ con Hamiltoniano $H(q,p,t)$.

Nota: Con esta notación nos indicamos que el Hamiltoniano depende en general de todas las coordenadas y momentos $H(q_1,\dots,q_n,p_1,\dots,p_n,t)$

Si elegimos el nuevo hamiltoniano K nulo, $K=H+\frac{\partial F}{\partial t}=0$, entonces todas las derivadas también serán nulas y por lo tanto todas las variables constantes.

Usamos una $F_2(q,P,t)$ cuyas ecuaciones de transformación son $p_i=\frac{\partial F_2}{\partial q_i}$ y $Q_i=\frac{\partial F_2}{\partial P_i}$

Entonces la ecuación de transformación del hamiltoniano $H+\frac{\partial F}{\partial t}=0$ puede escribirse como

$$H(q,\frac{\partial F_2}{\partial q},t)+\frac{\partial F_2}{\partial t}=0$$

Por tradición $F_2(q,P,t)$ se llama la función principal de Hamilton y se denota $S(q,P,t)$ entonces resulta $H(q,\frac{\partial S}{\partial q},t)+\frac{\partial S}{\partial t}=0$, aquí la incógnita es la función $S(q,P,t)$, si encontramos esta función podemos usar las ecuaciones de transformación y resolver todo el problema.

Notamos que es una ecuación diferencial en derivadas parciales con $n+1$ derivadas primeras $\frac{\partial S}{\partial q_i}$ para $i=1,\dots,n$ y $\frac{\partial S}{\partial t}$, por lo tanto tenemos $n+1$ constantes de integración.

De todas estas constantes de integración, una de ellas es *puramente aditiva* pero como en las ecuaciones de transformación solo aparecen las derivada entonces nos quedamos con n constantes de integración donde descartamos la aditiva (es como si sumasemos una constante a un potencial) .

Estas constantes n de integración que denominamos $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ *juegan un papel muy importante.*

El **truco del método de Hamilton Jacobi** es elegir estas $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ como los nuevos momentos canónicos $P_1,\dots,P_n$ es decir $\alpha_i=P_i$ para $i=1,\dots,n$.

Escribiendo explícitamente todas las variables, la función principal de Hamilton resulta $S(q_1,\dots,q_n,\alpha_1,\dots,\alpha_n,t)$ y la ecuación

$$\boxed{H(q_1,\dots,q_n,,\frac{\partial S}{\partial q_1},\dots,\frac{\partial S}{\partial q_n},t)+\frac{\partial S}{\partial t}=0}$$

esta ecuación se conoce como *ecuación de Hamilton Jacobi para la función principal de Hamilton.*

Como mencionamos antes es una EDP con $n+1$ variables. Supongamos que logramos resolverla y hallar la solución $S(q_1,\dots,q_n,\alpha_1,\dots,\alpha_n,t)$.

Las ecuaciones de transformación, $p_i=\frac{\partial F_2}{\partial q_i}$ y $Q_i=\frac{\partial F_2}{\partial P_i}$ para $i=1,\dots,n$, nos permiten encontrar las leyes horarias.

Escribiendo estas ecuaciones con la notación tradicional obtenemos $p_i=\frac{\partial S(q,a,t)}{\partial q_i}$ y como las nuevas coordenadas también son constantes: $Q_i=\beta_i=\frac{\partial S(q,\alpha,t)}{\partial \alpha_i}$ para $i=1,\dots,n$.

Estas ecuaciones en principio permiten hallar las leyes horarias $q_i(\alpha,\beta,t)$ y $p_i(\alpha,\beta,t)$ en función de las constantes α_i,β_i .

Como en principio conocemos $q_i(t_0)=q_{i0}$ y $p_i(t_0)=p_{i0}$ tenemos que evaluar las ecuaciones de transformación en t_0 para obtener $\alpha_i=\alpha_i(q_0,p_0)$ y $\beta_i=\beta_i(q_0,p_0)$.

Finalmente obtenemos las leyes horarias en función de las condiciones iniciales $q_i(q_{i0},p_{i0},t)$ y $p_i(q_{i0},p_{i0},t)$.

En resumen:

1. Dado un Hamiltoniano, escribir la ecuación de HJ

$$\boxed{H(q_1,\dots,q_n,,\frac{\partial S}{\partial q_1},\dots,\frac{\partial S}{\partial q_n},t)+\frac{\partial S}{\partial t}=0}$$

2. Resolverla para hallar $S(q_1,\dots,q_n,\alpha_1,\dots,\alpha_n,t)$

3. Usar las ecuaciones de transformación $p_i=\frac{\partial S(q,a,t)}{\partial q_i}$ y $\beta_i=\frac{\partial S(q,\alpha,t)}{\partial \alpha_i}$ para $i=1,\dots,n$.

4. Evaluar en t_0 para obtener $\alpha_i=\alpha_i(q_0,p_0)$ y $\beta_i=\beta_i(q_0,p_0)$, invertir estas relaciones para obtener $q_i(q_{i0},p_{i0},t)$ y $p_i(q_{i0},p_{i0},t)$.

Observación: Tomamos $S(q_1,\dots,q_n,\alpha_1,\dots,\alpha_n,t)$ y calculamos la derivada total respecto al tiempo $\frac{dS}{dt}=\frac{\partial S}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial S}{\partial t}$

Sustituyendo $H=-\frac{\partial S}{\partial t}$ y $p_i=\frac{\partial S}{\partial q_i}$ resulta $\frac{dS}{dt}=p_i\dot{q}_i-H=L$ entonces $S=\int L\,dt+cte$

Ejemplo: Potencial gravitatorio constante

$$H = \frac{p^2}{2m} + m g q$$

Recordemos $\quad \dot p = -\frac{\partial H}{\partial q} = -mg$

$$\dot q = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \Rightarrow \ddot q = \dot p/m \Rightarrow \ddot q = -g$$

$$\Rightarrow q(t) = -\frac{g}{2}t^2 + \dot q_0 t + q_0$$

Planteamos <u>HJ</u>

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + mgq + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

Buscamos soluciones $\quad S(q,\alpha,t) = W(q,\alpha) - \alpha t$

$$\Rightarrow \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2 + mgq = \alpha \Rightarrow W = \int dq\,\sqrt{2m(\alpha - mgq)}$$

$$\Rightarrow S = \int \sqrt{2m(\alpha - mgq)}\,dq - \alpha t$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2\sqrt{ax+b}}{a}$$

(1) $\quad p = \frac{\partial S}{\partial q} = \sqrt{2m(\alpha - mgq)}$

(2) $\quad \beta = \frac{\partial S}{\partial \alpha} = \int \frac{m\,dq}{\sqrt{2m(\alpha - mgq)}} - t \Rightarrow \beta = \sqrt{\frac{m}{2}}\,\frac{2\sqrt{\alpha - mgq}}{(-mg)} - t$

De (1) $\quad p^2/2m = \alpha - mgq$. $\quad$ de (2) $\quad (t+\beta)^2 = \frac{2}{g}(q_0 - q)$

tomando $\quad q(0) = q_0, \; p(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{q(t) = q(0) - g\frac{t^2}{2}}$

$$\frac{p^2}{2m} = mgq_0 - mg\left(q_0 - g\frac{t^2}{2}\right) \Rightarrow \boxed{p(t) = mgt}$$

Ejemplo Oscilador armónico

$$H = \frac{1}{2m}\left(p^2 + m^2 w^2 q^2\right)$$

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + m^2 q^2 w^2\right] + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

Planteamos $\quad S = W(q, \alpha) - \alpha t$

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2 + m^2 w^2 q^2\right] = \alpha$$

Despejando $\quad \frac{\partial W}{\partial q} = \sqrt{2m\alpha} \int dq \sqrt{1 - \frac{m w^2}{2\alpha} q^2}$

Nos interesa $\quad \beta = \frac{\partial S}{\partial \alpha} = \frac{\partial W}{\partial \alpha} - t \quad \Rightarrow$

$$\begin{cases} \beta = \sqrt{\dfrac{m}{2\alpha}} \displaystyle\int \frac{dq}{\sqrt{1 - \frac{m w^2}{2\alpha} q^2}} - t \\ p = \dfrac{\partial S}{\partial q} = \sqrt{2m\alpha} \sqrt{1 - \dfrac{m w^2 q^2}{2\alpha}} \end{cases}$$

usando tablas de integrales $\quad \beta + t = \frac{1}{w} \arcsin\left(q \sqrt{\frac{m w^2}{2\alpha}}\right)$

$$\Rightarrow \boxed{q = \sqrt{\frac{2\alpha}{m w^2}} \sin(w(\beta + t))}$$ y sustituyendo en la otra ec.

$$\boxed{p = \sqrt{2m\alpha} \cos(w(\beta + t))}$$

Cond. iniciales $\quad \mathrm{tg}\, w\beta = m w \, q_0 / p_0$

$$2m\alpha = p_0^2 + m^2 w^2 q_0^2$$

$\Rightarrow$ $\beta \sim$ fase inicial

$\alpha \sim$ Energía

$\boxed{\text{Ec. de Hamilton - Jacobi para la función característica de Hamilton.}}$

Si $\dfrac{\partial H}{\partial t} = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial S}{\partial t} + H(q, \dfrac{\partial S}{\partial q}) = 0$

podemos plantear $S(q, \alpha, t) = \underbrace{W(q, \alpha)}_{\text{Función característica de H.}} - \alpha_1 t$

Sustituyendo $\Rightarrow H(q, \dfrac{\partial W}{\partial q}) = \alpha_1$

Se puede demostrar que W por sí sola genera una T. C., donde las nuevas P_i son ctes. y α_1 en particular es la energía.

Tenemos n ctes. ~~aditivas~~ (sacando la cte. aditiva) nos quedan las n-1 α_i

Las ecuaciones de transf. serán
$$\begin{cases} p_i = \dfrac{\partial W}{\partial q_i} & (1) \\ Q_i = \dfrac{\partial W}{\partial \mathbb{P}_i} = \dfrac{\partial W}{\partial \alpha_i} \end{cases}$$

$H(q, p) = \alpha_1 = K$, las ecuaciones de movimiento serán

$$\dot{\mathbb{P}}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i} = 0 \quad \text{y} \quad \dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial \alpha_i} = \begin{cases} 1 & i=1 \\ 0 & i \neq 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow Q_1 = t + \beta_1 = \dfrac{\partial W}{\partial \alpha_1} \quad i=1$ } la única que no es cte. de mov.

$Q_i = \beta_i = \dfrac{\partial W}{\partial \alpha_i} \quad i \neq 1 \Rightarrow$ no contiene el tiempo conduce a las ecuaciones orbitales.

* Observamos que la variable conjugada del tiempo es la energía.

* $\dfrac{dW}{dt} = \dfrac{\partial W}{\partial q_i} \dot{q}_i = p_i \dot{q}_i \Rightarrow W = \int p_i \, dq_i$ (acción abreviada)

* Evaluando (1) en $t=0$, $p_i = \dfrac{\partial W}{\partial q_i} \Rightarrow p_{io} = p_{io}(q_{io}, \alpha_i)$

Comparación

Función principal	característica.
$H(q, p, t)$	$H(q, p)$
la T.C. lleva a	
$Q_i, \mathbb{P}_i$ ctes	$\mathbb{P}_i$ ctes
$K = 0$	$K = \alpha_1 \quad H(\mathbb{P}_i) = \alpha$
Ec. de movimiento	
$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial \mathbb{P}_i} = 0$	$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial \mathbb{P}_i} = \nu_i = \begin{cases} 1 & i=1 \\ 0 & i \neq 1 \end{cases}$
$\dot{\mathbb{P}}_i = 0$	$\dot{\mathbb{P}}_i = 0$
$Q_i = \beta_i$	$Q_i = \nu_i t + \beta_i$
$\mathbb{P}_i = \alpha_i$	$\mathbb{P}_i = \alpha_i$
$H(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$	$H(q, \frac{\partial W}{\partial q}) = \alpha_1$
$S(q, \mathbb{P}, t)$	$W(q, P)$
$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}$	$p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i}$
$Q_i = \frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i$	$Q_i = \frac{\partial W}{\partial \alpha_i} = \nu_i t + \beta_i$