Relaciones

Notas para el curso de Matemática Discreta 2021, dictado por
Mariana Haim y Leandro Bentancur.
(Extraido y adaptado de las notas del curso 2020)

Centro de Matemática.
Facultad de Ciencias - UdelaR

Como se vio en el Capítulo de Funciones, una relación de un conjunto A en un conjunto B es un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$. Allí estudiamos una clase especial de relaciones: las funciones. En este capítulo trataremos otras dos clases de relaciones que tienen la particularidad de estar contenidas en productos de la forma $X \times X$. Una relación $\mathcal{R}$ de esta forma será llamada simplemente **relación en** X y escribiremos $x\mathcal{R}y$ si $(x, y) \in \mathcal{R}$. Diremos también que $\mathcal{R}$ es

- **reflexiva** si $x\mathcal{R}x$ para todo $x \in X$.
- **simétrica** si para todos $x, y \in X$ $x\mathcal{R}y$ implica $y\mathcal{R}x$.
- **asimétrica** si para todos $x, y \in X$, $x\mathcal{R}y$ implica que no se cumple $y\mathcal{R}x$.
- **antisimétrica** si para todos $x, y \in X$, $x\mathcal{R}y$ y $y\mathcal{R}x$ implica $x = y$.
- **transitiva** si para todos $x, y, x \in X$, $x\mathcal{R}y$ y $y\mathcal{R}z$ implica $x\mathcal{R}z$.

Ejemplo 0.0.1. Consideremos el conjunto $X = \{1, 2, 3, 4\}$ y las relaciones

- $\mathcal{R}_1 = \emptyset$.
- $\mathcal{R}_2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$
- $\mathcal{R}_3 = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 4)\}$
- $\mathcal{R}_4 = X \times X$.

Observamos que sólo $\mathcal{R}_2$ y $\mathcal{R}_4$ son reflexivas, sólo $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_4$ son simétricas, todas salvo $\mathcal{R}_4$ son antisimétricas, sólo $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_3$ son asimétricas y que todas salvo $\mathcal{R}_3$ son transitivas.

0.1. Relación opuesta y composición de relaciones

Dada una relación $\mathcal{R}$ de A en B, su **relación opuesta** es la relación $\mathcal{R}^{op}$ de B en A, definida por

$$\mathcal{R}^{op} := \{(b,a) \in B \times A \mid (a,b) \in \mathcal{R}.$$

Observación 0.1.1. Si $f : A \to B$ es función, f es invertible si y sólo si su relación opuesta $f^{op} \subseteq B \times A$ es una función.

Dadas dos relaciones $\mathcal{R} \subseteq A \times B, \mathcal{S} \subseteq B \times C$, se define la composición $S \circ R$ como sigue:

$$S \circ R := \{(a,c) \in A \times C \mid existe b \in B \text{ tal que } (a,b) \in R, (b,c) \in S\}.$$

Observación 0.1.2. 1. Una relación en S es

- reflexiva si y sólo si $Id_A \subseteq R$,
- simétrica si y sólo si $R^{op} = R$,
- asimétrica si y sólo si $R \cap R^{op} = \emptyset$,
- antisimétrica si y sólo si $R \cap R^{op} \subseteq Id_X$,
- transitiva si y solo si $R \circ R \subseteq R$.

2. Toda relación asimétrica es antisimétrica, pero el recíproco no es cierto.

0.2. Relaciones de equivalencia

Una relación $\mathcal{R}$ en un conjunto X es una **relación de equivalencia** si es reflexiva, simétrica y transitiva. Generalmente se usará para las relaciones de equivalencia la notación: $\sim$, $\approx$, $\simeq$, $\cong$, $\equiv$ o $\asymp$.

Ejemplo 0.2.1 (Congruencia módulo n)**.** Fijemos $n \in \mathbb{Z}$ y consideremos en $\mathbb{Z}$ la relación $\equiv_n$, definida por

$$a \equiv_n b \Leftrightarrow a - b \text{ es múltiplo de } n.$$

Aquí la noción de *múltiplo* puede definirse de la misma forma que para los números naturales a partir de la división entera. Veamos que se trata de una relación de equivalencia:

- Es reflexiva: $a - a = 0$ es múltiplo de n para todo $a \in \mathbb{Z}$, es decir que $a \equiv_n a$ para todo a.

- Es simétrica: si $a \equiv_n b$, entonces $a-b = kn$ para algún $k \in \mathbb{Z}$. Luego $b-a = -kn$, lo que quiere decir que $b \equiv_n a$.
- Supongamos que $a \equiv_n b$ y $b \equiv_n c$. Esto implica que existen k y h tales que $a - b = kn$ y $b - c = hn$, luego

  $$a - c = a - b + b - c = kn + hn = (k + h)n.$$

  Por lo tanto $a \equiv_n c$.

0.3. Clases de equivalencia y conjunto cociente

Dada una relación de equivalencia $\sim$ en un conjunto X, definimos la **clase de equivalencia** de un elemento $x \in X$ como el subconjunto de todos los elementos de X que se relacionan con x, es decir,

$$[x] = \{y \in X : x \sim y\} \subset X.$$

Por ejemplo, para la congruencia módulo 3 (Ejemplo 0.2.1) podemos mirar la clase del cero:

$$[0] = \{n \in \mathbb{Z} : n - 0 \text{ es múltiplo de } 3\} = \{3m : m \in \mathbb{Z}\}.$$

Este es el conjunto de todos los números enteros que son múltiplos de 3. En este caso la clase del 0 para la congruencia módulo n es siempre el conjunto de los múltiplos de n. Observemos que en general la transitividad de la relación de equivalencia implica que si $x \sim y$, entonces $[x] = [y]$.
Definimos el **conjunto cociente** de una relación $\sim$ en X como el conjunto de todas las clases de equivalencia, esto es

$$X/\sim = \{[x] : x \in X\} \subset \mathcal{P}(X).$$

Volvamos al ejemplo de la congruencia módulo 3. Para hallar el cociente de esta relación debemos determinar cuáles son todas sus clases de equivalencia. Ya sabemos que la clase del cero es el conjunto de todos los múltiplos de 3. Observamos que además

- $[1] = \{3n + 1 : n \in \mathbb{Z}\}$, y
- $[2] = \{3n + 2 : n \in \mathbb{Z}\}$

son otras dos clases diferentes. Se tiene además que si $n \in \mathbb{Z}$, entonces al dividir n entre 3 obtenermos $n = 3q + r$ con $0 \leq r < 3$. Luego n está en alguna de las clases anteriormente mencionadas. En conclusión

$$\mathbb{Z}/\equiv_3 = \{[0], [1], [2]\}.$$

Ejercicio 0.3.1. Probar que en general el cociente $\mathbb{Z}/\equiv_n$ tiene n elementos.

Dada una relación de equivalencia $\sim$ en un conjunto X definimos la **proyección al cociente** como la función

$$\pi : X \to X/\sim,\ \pi(x) = [x].$$

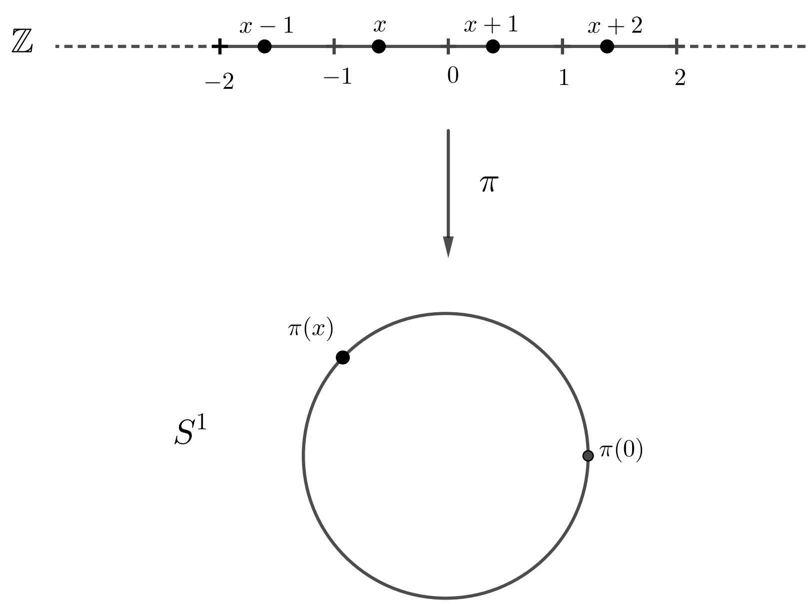
Ejemplo 0.3.2. Ponemos en $\mathbb{R}$ la siguiente relación:

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}.$$

Se deja como ejercicio probar que $\sim$ es una relación de equivalencia. El conjunto cociente de esta relación puede verse geométricamente como el círculo

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}.$$

Observar que de esta forma la proyección queda $\pi : \mathbb{Z} \to S^1,\ \pi(x) = e^{2\pi i x}$.



0.3.1. Particiones

Una **partición** de un conjunto X es una familia P de subconjuntos de X que verifica las siguientes condiciones:

1. Cada elemento de P es no vacío.

2. Dos elementos diferentes de P son disjuntos (se dice también que los elementos de P son disjuntos dos a dos).

3. La unión de los elementos de P es todo X, es decir $\bigcup P = X$.

Ejemplos 0.3.3.

1. Si X es cualquier conjunto, entonces $\{\{x\} : x \in X\}$ es una partición de X; también lo es X. Diremos que estas son las particiones **triviales** de X.

2. Consideremos $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Luego si ponemos

$$A = \{1\},\ B = \{2, 5\},\ C = \{3, 4, 6\} \text{ y } D = \{1, 6\},$$

tenemos por ejemplo que $P_1 = \{A, B, C\}$ es una partición pero $P_2 = \{B, D\}$ y $P_3 = \{B, C, D\}$ no lo son.

El siguiente resultado muestra que las relaciones de equivalencia en X y las particiones de X son en definitiva puntos de vista distintos para un mismo concepto.

Proposición 0.3.4.

1. Si $\sim$ es una relación de equivalencia en el conjunto X, entonces el cociente $X/\sim$ es una partición en X.

2. Sea P una partición en un conjunto X. Entonces existe una única relación de equivalencia $\sim$ en X tal que $X/\sim = P$.

Demostración. Para probar la primera parte debemos ver primero que las clases de equivalencia de la relación $\sim$ son disjuntas dos a dos. Supongamos entonces que tenemos dos clases diferentes $[x]$ e $[y]$ que no son disjuntas. Esto quiere decir que existe z en la intersección de ambas, o dicho de otro modo $z \sim x$ y $y \sim z$. La transitividad de $\sim$ implica que $x \sim y$ y luego $[x] = [y]$. Por otro lado es claro que todo elemento $x \in X$ pertenece a una clase de equivalencia, luego la unión de todas las clases de equivalencia es el conjunto X.
Para la segunda parte alcanza con definir $\sim$ de la siguiente forma:

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists A \in P \text{ tal que } x, y \in A.$$

No es dificil verificar que $\sim$ es una relación de equivalencia. Para probar la unicidad, supongamos que $\sim$ y $\equiv$ son dos relaciones de equivalencia tal que $X/\sim\, = X/\equiv\, = P$. Probemos que $x \sim y$ si y sólo si $x \equiv y$:

$$\begin{aligned} x \sim y &\Leftrightarrow x \text{ e } y \text{ pertenecen a la misma clase de equivalencia para } \sim \\ &\Leftrightarrow x \text{ e } y \text{ pertenecen a la misma clase de equivalencia para } \equiv \\ &\Leftrightarrow x \equiv y. \end{aligned}$$

□

0.3.2. Números racionales

Consideremos en el conjunto $X = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^+$ (con $\mathbb{Z}^+$ el conjunto de los enteros positivos) la relación dada por

$$(n, m) \sim (k, r) \Leftrightarrow nr = mk.$$

Veamos primero que es una relación de equivalencia:

- Es reflexiva: $(n, m) \sim (n, m)$ porque claramente $nm = nm$.
- Es simétrica: si $(n, m) \sim (k, r)$, entonces $nr = mk$. Esto implica que $mk = nr$ y luego $(k, r) \sim (n, m)$.
- Supongamos que $(n, m) \sim (k, r)$ y $(k, r) \sim (\ell, h)$, es decir, $nr = mk$ y $kh = r\ell$. Luego multiplicando la primera igualdad por h se tiene

  $$nrh = mkh = mr\ell.$$

  Como $r \neq 0$, la igualdad anterior implica $nh = m\ell$, lo que significa que $(n, m) \sim (\ell, h)$.

Adoptaremos la notación $\frac{n}{m}$ para referirnos a la clase de (n, m) y escribimos $\mathbb{Q} := X/\sim$. Este cociente es el conjunto de los **números racionales**. A partir de esta construcción podemos observar que los números enteros pueden verse como un subconjunto de los números racionales. Más precisamente lo hacemos mediante la función inyectiva

$$i : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}, \ i(n) = \frac{n}{1}.$$

Definimos las operaciones suma y producto en $\mathbb{Q}$ de la siguiente manera:

$$\frac{n}{m} + \frac{k}{r} = \frac{nr + km}{mr}; \qquad \frac{n}{m} \cdot \frac{k}{r} = \frac{nk}{mr}.$$

Se deja como ejercicio probar que estas operaciones están bien definidas, es decir que si $\frac{n}{m} = \frac{n'}{m'}$ y $\frac{k}{r} = \frac{k'}{r'}$, entonces

$$\frac{nr + km}{mr} = \frac{n'r' + k'm'}{m'r'} \text{ y } \frac{nk}{mr} = \frac{n'k'}{m'r'}.$$

Observar que las operaciones definidas en $\mathbb{Q}$ extienden a las operaciones definidas en $\mathbb{Z}$:

$$i(n) + i(m) = \frac{n}{1} + \frac{m}{1} = \frac{n + m}{1} = i(n + m)$$

y

$$i(n) \cdot i(m) = \frac{n}{1} \cdot \frac{m}{1} = \frac{nm}{1} = i(nm).$$