Principios básicos de Conteo

Notas para el curso de Matemática Discreta 2021, dictado por
Mariana Haim y Leandro Bentancur.
(Extraido y adaptado de las notas del curso 2020)

Centro de Matemática.
Facultad de Ciencias - UdelaR

En el capítulo anterior dijimos que un conjunto X es finito si para algún natural n existe una función biyectiva

$$f : \{1, \dots, n\} \to X.$$

En este caso decíamos que n es el cardinal de X, o que X tiene n elementos. Sabemos entonces expresar de forma precisa lo que significa *contar* un conjunto finito, que es en definitiva determinar su cardinal.
A lo largo de este capítulo trabajaremos sobre desarrollar estrategias para contar.
Para ilustrar la complejidad que puede tener el problema de contar, planteemos dos ejemplos:

1. ¿Cuál es el cardinal del siguiente conjunto de símbolos $\{*, 0, 35, +, a, k\}$?
2. ¿Cuántas palabras de 12 letras (no necesariamente pertenecientes al diccionario) tienen dos vocales consecutivas?

En el primer caso, se puede observar que el conjunto tiene 6 elementos. Pero la resolución del segundo presenta cierta complejidad. El conteo de todas las posibles palabras de largo 12 es ya un problema no trivial que equivale, por ejemplo, a contar funciones $f : \{1, \dots, 12\} \to \mathcal{A}$ donde $\mathcal{A}$ es el abecedario. Agreguemos a esto que debemos determinar cuales de todas estas funciones corresponden a palabras con dos vocales consecutivas.

Veremos aquí algunas propiedades fundamentales que servirán de punto de partida para atacar problemas de conteo a lo largo de todo el capítulo.

0.0.1. Principio de la suma

Un primer enunciado del principio de la suma es el siguiente:

Principio de la suma
Si una tarea puede ser realizada de m formas diferentes, y otra tarea puede ser realizada de n formas diferentes, y ambas no pueden realizarse simultáneamente, entonces hay $m+n$ formas de realizar una o la otra.
A modo de ejemplo, consideremos el siguiente problema:

Ejemplo 0.0.1. Una niña va a un quiosco y quiere elegir una golosina de entre dos frascos. En uno de los frascos hay 25 caramelos surtidos (sorprendentemente todos diferentes), mientras que el otro contiene 10 chicles (todos de diferente sabor). La niña calcula que tiene $25 + 10 = 35$ opciones para elegir su golosina.

En el ejemplo anterior se puede interpretar cada frasco como un conjunto, y las opciones de escoger golosinas de un frasco como el cardinal de dicho conjunto. Por otro lado la elección que se le ofrece a la niña es equivalente a juntar todas las golosinas en una bolsa y pedirle que saque de allí una unidad cualquiera. Este nuevo conjunto es la unión de los dos conjuntos anteriores. Luego si A es el conjunto de los caramelos y B es el conjunto de los chicles, el principio de la suma en este caso puede leerse como la igualdad $\#(A \cup B) = \#A + \#B$. De aquí extraemos una enunciación un poco más precisa de este principio:

Teorema 0.0.2 (Principio de la suma)**.** *Sean A y B dos conjuntos disjuntos. Entonces $\#(A \cup B) = (\#A) + (\#B)$.*

Demostración. Supongamos que $\#A = m$ y $\#B = n$. Esto quiere decir que existen dos funciones biyectivas $f : \{1, \ldots, m\} \to A$ y $g : \{1, \ldots, n\} \to B$. Definimos la función $h : \{1, \ldots, m+n\} \to A \cup B$ por:

$$h(k) = \begin{cases} f(k) & \text{si } k \leq m \\ g(k-m) & \text{si } k > m \end{cases}$$

Debemos probar que h es biyectiva, luego queda probada la tesis.
Veamos primero que es inyectiva. Supongamos que $h(k) = h(r)$ (sin pérdida de generalidad podemos asumir $k \leq r$). Distinguimos tres casos:

- Si $k, r \leq m$, entonces $f(k) = f(r)$, y como f es inyectiva, k=r.
- Si $k \leq m < r$, entonces $h(k) = f(k) \in A$ y $h(r) = g(r-m) \in B$. Pero esto es absurdo porque A y B son disjuntos.
- Si $k, r > m$, entonces $g(k-m) = g(r-m)$, lo que implica $k - m = r - m$ y luego $k = r$.

Tenemos entonces la inyectividad de h.
Probemos ahora que h es sobreyectiva. Si $x \in A \cup B$ podemos distinguir dos casos:

- Si $x \in A$, existe $k \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $f(k) = x$ y luego $h(k) = x$.

- Si $x \in B$, existe $k \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $g(k) = x$ y luego $h(k+m) = x$.

Concluimos que h es sobreyectiva y por lo tanto biyectiva. $\square$

Usando la asociatividad de la unión podemos deducir lo siguiente:

Corolario 0.0.3. *Si $A_1, \ldots, A_k$ son conjuntos finitos disjuntos dos a dos, entonces*

$$\#(A_1 \cup \ldots \cup A_k) = (\#A_1) + \cdots + (\#A_k)$$

0.0.2. Principio del producto

Consideramos ahora el siguiente enunciado, que se conoce como principio del producto:
Principio del producto
Si un procedimiento puede ser dividido en un primer paso para el cual hay m posibilidades y un segundo paso, y si para cada forma de realizar el primer paso hay luego n formas de realizar el segundo, entonces el procedimiento puede ser realizado de m.n formas diferentes.
Este principio es un poco más complejo y para lograr una formulación más precisa en términos de la teoría de conjuntos vamos a ilustrar con dos ejemplos.
Para el primero estudiemos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 0.0.4. En un bar, el almuerzo ofrecido consiste de una fórmula de plato principal y postre. Para el plato principal el bar dispone de siete opciones, mientras que tiene sólo cinco opciones de postre. ¿Cuántas posibles fórmulas es posible armar?

Reinterpretando lo anterior, podemos llamar A al conjunto de platos principales y B al conjunto de postres. Luego podemos ver las diferentes fórmulas como el conjunto $A \times B$. La regla del producto puede interpretarse de la siguiente manera:

Proposición 0.0.5. *Sean A y B conjuntos finitos. Entonces $\#(A \times B) = (\#A).(\#B)$.*

Demostración. Supongamos que $\#A = m$ y $\#B = n$, entonces existen funciones biyectivas $f : \{0, \ldots, m-1\} \to A$ y $g : \{0, \ldots, n-1\} \to B$.
Queremos definir una función biyectiva $h : \{0, \ldots, nm-1\} \to A \times B$. Para esto recordemos el teorema de división entera tomando m como divisor: *Dado $k \in \mathbb{N}$ existen $q \in \mathbb{N}$ y $r \in \{0, \ldots, m-1\}$ tales que $k = qm + r$. Luego definimos:*

$$h(k) = (f(r), g(q)), \ \textit{donde } k = qm + r.$$

Para ver que esta función es inyectiva suponemos que $h(k) = h(\ell)$, es decir que si $k = qm + r$ y $\ell = q'm + r'$, entonces $f(r) = f(r')$ y $g(q) = g(q')$. Como f y g son inyectivas tenemos que $q = q'$ y $r = r'$, lo que implica $k = \ell$.
Para ver que es sobreyectiva tomemos un par (a, b) con $a \in A$ y $b \in B$ y pongamos

$r = f^{-1}(a)$ y $q = g^{-1}(b)$. Luego es claro que $h(qm + r) = (a, b)$.
Concluimos entonces que h es biyectiva, por lo que se cumple la tesis.
Otra forma (tal vez más directa) de ver que h es biyectiva es verificando que la función

$$(a, b) \mapsto g^{-1}(b)m + f^{-1}(a)$$

es su inversa. □

Sin embargo podemos observar que el principio del producto tal como lo hemos enunciado es más general que esto, ya que la Proposición 0.0.5 no contempla el siguiente ejemplo:

Ejemplo 0.0.6. Un día el bar decide ofrecer otra promoción. Se trata de un plato principal entre las siguientes opciones: colita de cuadril, filete de merluza o tarta de zapallitos. Con el plato principal se ofrece sin cargo la bebida con el siguiente criterio:

- La colita de cuadril (C) puede ir acompañada por vino tinto, gaseosa sabor cola o agua.
- El filete de merluza (M) puede ir acompañado con vino blanco, jugo de naranja o agua.
- La tarta de zapallitos (Z) puede ir con licuado de frutas, jugo de naranja o agua.

Usando el principio del producto uno puede rápidamente concluir que las posibles combinaciones son $3 \cdot 3 = 9$. Podemos pensar que $A = \{C, M, Z\}$ es el conjunto de los platos principales, mientras que hay tres conjuntos diferentes de bebidas

- $B_C = \{\text{vino tinto}, \text{gaseosa cola}, \text{agua}\}$
- $B_M = \{\text{vino blanco}, \text{jugo de naranja}, \text{agua}\}$
- $B_Z = \{\text{licuado de frutas}, \text{jugo de naranja}, \text{agua}\}$

Luego el conjunto de opciones no puede codificarse por un producto cartesiano de una forma directa.

En el ejemplo anterior $\{B_C, B_M, B_Z\}$ es una familia de conjuntos indexada en A, y una opción admisible es un par (x, y) donde $x \in A$ y $y \in B_x$. Generalizando esta observación podemos dar otra formulación del principio del producto:

Teorema 0.0.7 (Principio del producto)**.** *Sea I un conjunto finito con m elementos y $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia indexada de conjuntos finitos tal que $\#A_i = n$ para todo $i \in I$. Pongamos $\mathcal{A} = \bigcup_{i \in I} A_i$ y consideramos el conjunto*

$$X = \{(i, a) \in I \times \mathcal{A} : a \in A_i\}.$$

Entonces $\#X = m.n$

Demostración. Probaremos que $X \simeq I \times \{1, \dots, n\}$, luego por la Proposición 0.0.5 se obtiene lo buscado.
Como para todo $i \in I$ se tiene que $\#A_i = n$, tenemos que existen funciones biyectivas $f_i : \{1, \dots, n\} \to A_i$. Definimos entonces una función $h : I \times \{1, \dots, n\} \to X$ por

$$h(i, k) = (i, f_i(k)).$$

Se deja como ejercicio verificar que esta función h es biyectiva. Luego el teorema queda demostrado. $\square$

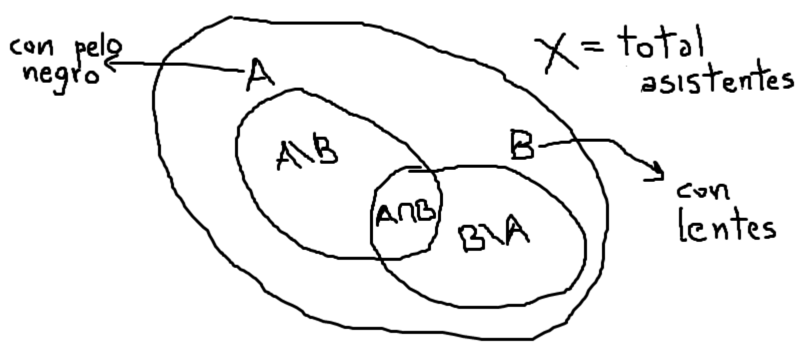
0.0.3. Principio de Inclusión-Exclusión

El principio de la suma resuelve el problema de contar los elementos de la unión de conjuntos disjuntos. Sin embargo este es un caso bastante particular y es natural preguntarse acerca de lo que sucede en caso de que los conjuntos que se están uniendo no sean disjuntos.

Ejemplo 0.0.8. Supongamos que tenemos un grupo de personas del cual sabemos que:

- 47 tienen pelo negro.
- 23 usan lentes.
- 17 usan lentes y tienen el pelo negro.
- 39 no tienen el pelo negro ni usan lentes.

Podemos ayudarnos con el siguiente dibujo:



Observemos que los datos de arriba pueden expresarse como sigue:

- $\#(A \cap B) = 17$
- $\#(A \setminus B) = \#A - \#(A \cap B) = 47 - 17 = 30$
- $\#(B \setminus A) = \#B - \#(A \cap B) = 23 - 17 = 6$
- $\#X \setminus (A \cup B) = \#(A \cup B)^c = 39$

Por el principio de la suma se tiene

$$\#X = \#(A \cup B)^c + \#(A \setminus B) + \#(B \setminus A) + \#(A \cap B) = 39 + 30 + 6 + 17 = 92.$$

Pero había otra forma de expresar esto:

$$\#X = \#(A \cup B)^c + \#A + \#B - \#(A \cap B). \tag{1}$$

Observemos que, al sumar los cardinales de A y B, estamos contando dos veces la intersección, por lo que tenemos que restar después el cardinal de ésta para eliminar los casos repetidos.

Ejercicio 0.0.9. Construir un ejemplo similar al anterior con tres conjuntos en lugar de dos y ver cómo quedaría la igualdad (1).

En general, para una cantidad finita arbitraria de conjuntos tenemos lo siguiente:

Teorema 0.0.10 (Principio de Inclusión-Exclusión)**.** *Consideremos $A_1, \dots, A_k$ una familia de conjuntos finitos todos incluidos en un conjunto X. Luego*

$$\#X = \#\left(\bigcup_{1\leq i\leq k} A_i\right)^c + \left(\sum_{1\leq i\leq k} \#A_i\right) - \left(\sum_{1\leq i<j\leq k} \#(A_i \cap A_j)\right) + \cdots + (-1)^{k-1}\#\left(\bigcap_{1\leq i\leq k} A_i\right).$$

Demostración. Vamos a probarlo en por inducción en la cantidad de conjuntos k.
En el caso $k = 1$, la fórmula se reduce a $\#X = \#A_1^c + \#A_1$.
Supongamos ahora que el principio de inclusión-exclusión se cumple para cierto k y consideremos en X la colección de subconjuntos $A_1, \dots, A_{k+1}$. Aplicando la fórmula a los primeros k conjuntos, tenemos

$$\#X = \#\left(\bigcup_{1\leq i\leq k} A_i\right)^c + \left(\sum_{1\leq i\leq k} \#A_i\right) - \cdots + (-1)^{k-1}\#\left(\bigcap_{1\leq i\leq k} A_i\right). \tag{2}$$

Observemos que

$$\left(\bigcup_{1\leq i\leq k} A_i\right)^c = \left(\bigcup_{1\leq i\leq k+1} A_i\right)^c \cup \left(A_{k+1} \setminus \left(\bigcup_{1\leq i\leq k} A_i\right)\right).$$

Además la unión es disjunta, por lo que

$$\#\left(\bigcup_{1\le i\le k} A_i\right)^c = \#\left(\bigcup_{1\le i\le k+1} A_i\right)^c + \#\left(A_{k+1}\setminus\left(\bigcup_{1\le i\le k} A_i\right)\right). \tag{3}$$

Por otro lado, aplicándole el principio de inclusión-exclusión para k subconjuntos al segundo sumando se tiene

$$\begin{aligned}\#A_{k+1}\setminus\left(\bigcup_{1\le i\le k} A_i\right) &= \#A_{k+1} - \left(\sum_{1\le i\le k} \#A_{k+1}\cap A_i\right)\\ &+ \left(\sum_{1\le i<j\le k} \#(A_{k+1}\cap A_i\cap A_j)\right) - \cdots + (-1)^k\#\left(\bigcap_{1\le i\le k+1} A_i\right).\end{aligned}$$

Combinando esto con las igualdades (2) y (3) obtenemos

$$\begin{aligned}\#X =& \#\left(\bigcup_{1\le i\le k+1} A_i\right)^c + \left(\sum_{1\le i\le k+1} \#A_i\right) - \left(\sum_{1\le i<j\le k+1} \#(A_i\cap A_j)\right) +\\ &\cdots + (-1)^k\#\left(\bigcap_{1\le i\le k+1} A_i\right).\end{aligned}$$

□

Para mostrar una aplicación de este principio consideramos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 0.0.11. Calculemos la cantidad de enteros positivos menores o iguales a 1000 que no son múltiplos ni de 2 ni de 3 ni de 5. Notamos por c_1, c_2 y c_3 la condición de ser múltiplo de 2, 3 y 5 respectivamente. Luego, siguiendo la notación mostrada anteriormente, vemos fácilmente que:

- $N(c_1) = \frac{1000}{2} = 500$
- $N(c_2) = \lfloor\frac{1000}{3}\rfloor = 333$
- $N(c_3) = \frac{1000}{5} = 200$
- $N(c_1, c_2) = \lfloor\frac{1000}{6}\rfloor = 166$
- $N(c_1, c_3) = \frac{1000}{10} = 100$
- $N(c_2, c_3) = \lfloor\frac{1000}{15}\rfloor = 66$
- $N(c_1, c_2, c_3) = \lfloor\frac{1000}{30}\rfloor = 33.$

Luego por el Principio de Inclusión-Exclusión se tiene que la cantidad buscada es

$$1000 - 500 - 333 - 200 + 166 + 100 + 66 - 33 = 266.$$