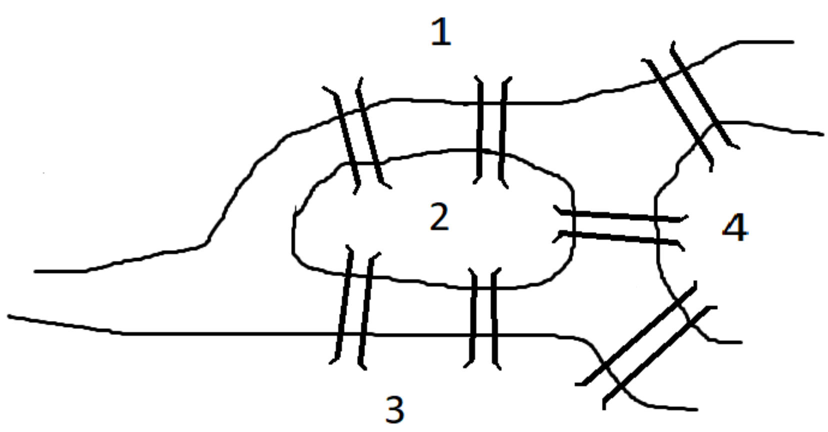
Grafos: generalidades

Notas para el curso de Matemática Discreta 2021, dictado por
Mariana Haim y Leandro Bentancur.
(Extraido y adaptado de las notas del curso 2020)

Centro de Matemática.
Facultad de Ciencias - UdelaR

Para motivar este capítulo presentaremos dos problemas. El primero es un problema célebre que data del siglo XVI y que, según se considera, da origen a la teoría de grafos. El segundo es un problema lúdico que circula entre los escolares (o circulaba en alguna época y alguna escuela).

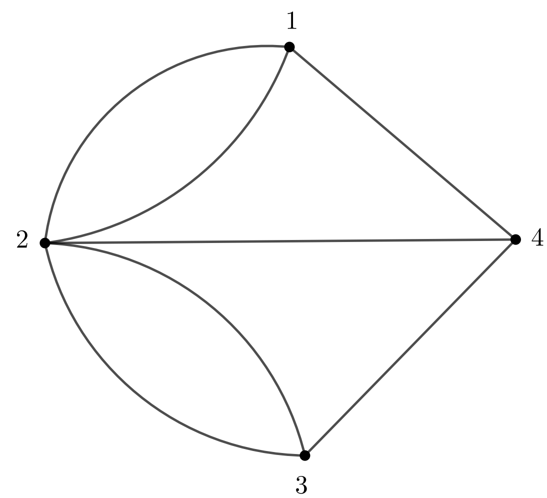
1. Problema de los puentes de Königsberg
La ciudad de Königsberg (antigua capital de Prusia Oriental, hoy llamada Kaliningrado) estaba atravesada por el río Pregel, sobre el que se disponían siete puentes como se muestra a continuación:



En este escenario se plantea el siguiente problema: ¿Es posible recorrer todos los puentes pasando por cada uno una única vez y terminando el recorrido en el punto de partida?

Es posible resolver el problema listando todos los posibles recorridos que no repitan puentes y verificando si entre ellos hay uno que cumpla las condiciones. Sin embargo el matemático suizo Leonard Euler dio una solución en el año 1736 (en una publicación titulada *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*) que puede generalizarse a toda una familia de problemas similares a este.

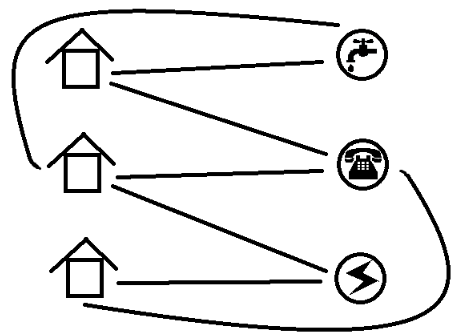
El primer paso en el análisis del problema consiste en simplificar el contexto hasta quedarse con los elementos esenciales del mismo. Observamos entonces que hay dos tipos de objeto en el problema: las regiones y los puentes. Se puede entonces representar el mapa anterior por medio de la siguiente figura, donde las regiones son representadas por puntos y los puentes por aristas. A los efectos del problema que estamos considerando no hay diferencia entre el mapa y esta figura (a la que vamos a denominar *grafo*, o más especificamente en este caso, *multigrafo*).



En la actualidad, la disposición de los puentes es diferente a la descrita, por lo que el problema ha cambiado. El lector puede plantearse entonces, además del propuesto, el problema de los puentes de Kaliningrado.

2. Problema de la conexión de servicios básicos en el plano

Se disponen en un territorio plano tres casas y tres usinas de servicios públicos: agua, telefonía y electricidad. El problema consiste en conectar las tres casas a los tres servicios mediante conectores independientes (cables o ductos) que no se corten entre sí. (Como nos encontramos en un mundo plano, no es posible pasar un cable por encima de otro.)



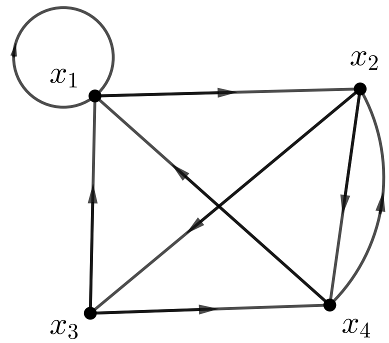
Hay una diferencia esencial entre el primer problema y el segundo. Mientras que el primero depende solamente de la estructura del grafo, es decir, de como están conectados los puntos mediante aristas, en el segundo se agrega una nueva circunstancia: el hecho de que el grafo está contenido en el plano. Veremos más adelante que estos corresponden a dos tipos diferentes de problemas más generales y mostraremos sus soluciones.

0.1. Primeras definiciones y ejemplos

Un **grafo dirigido** es un par (V, E) donde V es un conjunto finito al que llamamos conjunto de **vértices** y E es un subconjunto de $V \times V$ al que llamamos conjunto de **aristas**.

Observar que el conjunto de aristas es una relación en el conjunto de vértices. Tenemos una nueva representación (esta vez geométrica) de las relaciones definidas en un conjunto. Por ejemplo, para el conjunto $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ podemos representar la relación $\mathcal{R} = \{(x_1, x_1), (x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_2, x_4), (x_3, x_1), (x_3, x_4), (x_4, x_1), (x_4, x_2)\}$ como sigue:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Nos interesa sobretodo definir grafos no dirigidos, es decir, que tengan aristas no orientadas. Para esto debemos reemplazar los pares ordenados por pares no ordenados.

Dados dos conjuntos X e Y consideramos el conjunto

$$X \cdot Y = \{\{x, y\} : x \in X, y \in Y\}.$$

Un **grafo no dirigido** (también llamado simplemente **grafo**) es un par (V, E) donde V es un conjunto finito y $E \subset V \cdot V$. Las aristas de la forma $\{x, x\} = \{x\}$ se denominan **lazos**

En general, usaremos la notación $G = (V, E)$ tanto para grafos dirigidos como para grafos no dirigidos. Escribimos también en este caso $V(G) = V$ y $E(G) = E$.

Decimos que dos vértices x y y de un grafo G (no dirigido) son **adyacentes** si $\{x, y\}$ es una arista del grafo.

Una arista del tipo $\{x\}$ (o (x, x) para el caso dirigido) se dice **lazo**.

Dado un grafo $G = (V, E)$ sin lazos y un vértice $v \in V$, el **grado de** v se define como

$$gr(v) = \#\{w \in V \mid v \text{ y } w \text{ son adyacentes}\}$$

Notar que el grado de un vértice v coincide con la cantidad de aristas e tales que $v \in e$. El primer resultado, simple y útil en Teoría de grafos es el que se conoce como *Hand-shaking Lemma* o Lema del *apretón de manos*.

Lema 0.1.1. *Lema de hand-shaking Dado un grado $G = (V, E)$ sin lazos, se tiene la siguiente igualdad*

$$\sum_{v \in V} gr(v) = 2\#E$$

Demostración. Cada sumando de la izquierda coincide con la cantidad de aristas que "tocan.ª v. En la suma, cada arista $\{v, w\}$ está considerada dos veces, una en $gr(v)$ y otra en $gr(w)$, por lo que el término de la izquierda es exactamente el doble de la cantidad total de aristas. □

La definición de grado de un vértice se extiende al caso de grafos (con eventuales lazos) y también de multigrafos, y vale el lema de hand-shaking, como veremos en el próximo capítulo.

0.1.1. Isomorfismos de grafos

Sean $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ dos grafos. Una función $f : V_1 \to V_2$ es un **isomorfismo de grafos** si

(i) f es biyectiva, y

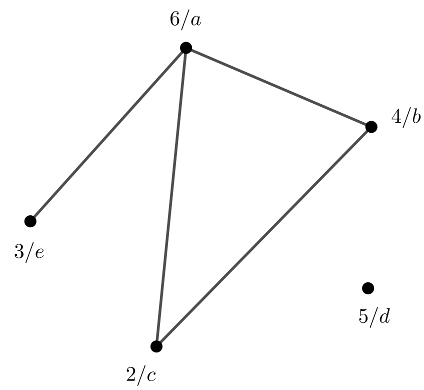
(ii) $\{x, y\} \in E_1$ si y sólo si $\{f(x), f(y)\} \in E_2$. Es decir, dos vértices son adyacentes si y sólo si sus imágenes por f lo son.

Observar que si $f : V_1 \to V_2$ es un isomorfismo de grafos, entonces queda definida una función biyectiva $f : E_1 \to E_2$ (usamos la misma notación que para la función en los vértices) que asocia a la arista $\{x, y\} \in E_1$ la arista $\{f(x), f(y)\} \in E_2$. Luego notamos al isomorfismo por $f : G_1 \to G_2$ entendiendo esto como una correspondencia tanto entre lo vértices como entre las aristas de ambos grafos. Emplearemos la notación $G_1 \cong G_2$ para indicar que ambos grafos son **isomorfos**, es decir, si existe un isomorfismo entre ellos.

Ejemplo 0.1.2. Consideramos los siguientes grafos:

- $V_1 = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ y E_1 definido por x e y son adyacentes si x e y tienen algún divisor primo en común.
- $V_2 = \{a, b, c, d, e\}$ y $E_2 = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, e\}, \{b, c\}\}$.

Definimos $f : V_1 \to V_2$ por $f(2) = c$, $f(3) = e$, $f(4) = b, f(5) = d$ y $f(6) = a$. Puede verse que f es un isomorfismo entre los grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$.



Observar que f no es el único isomorfismo entre ambos grafos. Por ejemplo uno puede considerar $g : V_1 \to V_2$ por $g(2) = b$, $g(3) = e$, $g(4) = c$, $g(5) = d$ y $g(6) = a$. ¿Hay algún otro isomorfismo?

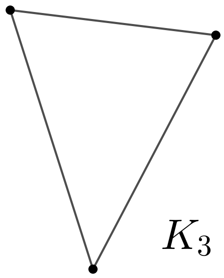
Si G_1 y G_2 son grafos dirigidos, entonces la definición de isomorfismo es análoga. La única modificación que hay que hacer es cambiar los pares en (ii) por pares ordenados.

En general nos interesarán, más que los grafos, las clases de isomorfismo de grafos. Por ejemplo, al mirar los grafos del Ejemplo 0.1.2, veremos los números y las letras simplemente como puntos que están unidos de a pares, sin importar el nombre de los vértices o la representación de las aristas.

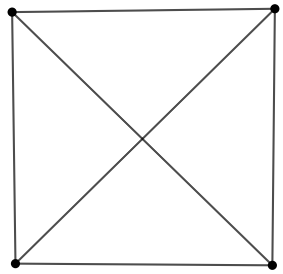
Un grafo $G = (V, E)$ se dice **completo** si $E = (V \cdot V) \setminus D$, donde

$$D = \{\{x, x\} : x \in V\}$$

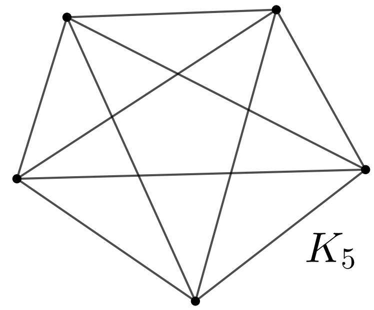
es el conjunto de los lazos en V. Es decir que es el grafo sin lazos de vértices V con el máximo número de aristas. Podemos observar que la clase de isomorfismo de un grafo completo sólo depende del número de vértices, es decir para cada $n \geq 1$ todos los grafos completos con n vértices son isomorfos. Luego notamos por K_n a cualquiera de ellos (o a todos ellos).



K_3

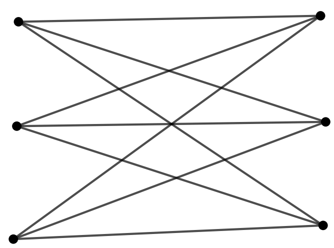


K_4



K_5

Un grafo $G = (V, E)$ es **bipartito** si $V = V_1 \cup V_2$ con $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ y $E = V_1 \cdot V_2$. Haciendo la misma consideración que para el grafo completo, ponemos la notación $K_{n,m}$ para referirnos al grafo bipartito con vértices $V = V_1 \cup V_2$ con $\#V_1 = n$ y $\#V_2 = m$.



$K_{3,3}$

0.1.2. Subgrafos

Sea $G = (V, E)$ un grafo (o grafo dirigido). Decimos que el grafo $G' = (V', E')$ es un **subgrafo** de G si $V' \subset V$ y $E' \subset E$. Si fijamos un grafo (o grafo dirigido) G, podemos notar el conjunto de los subgrafos de G como $\mathcal{S}(G)$ y definir en este la siguiente relación de orden:

$$G_1 \leq G_2 \Leftrightarrow G_1 \text{ es subgrafo de } G_2.$$

Puede verse que en general esta relación de orden no es total y que tiene al grafo vacío como mínimo y al grafo G como máximo.

Un **encaje** de un grafo $G_1 = (V_1, E_1)$ en otro grafo $G_2 = (V_2, E_2)$ es una función inyectiva $f : V_1 \to V_2$ tal que si $\{x, y\} \in E_1$, entonces $\{f(x), f(y)\} \in E_2$. Denotamos también al encaje por $f : G_1 \to G_2$, y por $f : E_1 \to E_2$ a la función inducida en las aristas. De forma similar se define un encaje de un grafo dirigido en otro.

Dados dos grafos (o grafos dirigidos) G_1 y G_2 escribimos

$$G_1 \preceq G_2 \Leftrightarrow \text{existe un encaje de } G_1 \text{ en } G_2.$$

Observación 0.1.3. La relación $\preceq$ es reflexiva y transitiva pero no es antisimétrica. De todas maneras se tiene un resultado en la dirección de la antisimetría que es el siguiente:

$$G_1 \preceq G_2 \preceq G_1 \Rightarrow G_1 \cong G_2$$

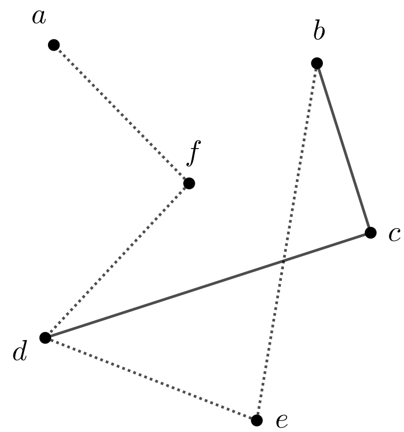
En efecto, probaremos que el encaje $f : G_1 \to G_2$ es un isomorfismo: como hay una función inyectiva (f) de V_1 a V_2 y una función inyectiva (g) de V_2 a V_1, se deduce que $\#V_1 = \#V_2$ y por tanto $f : V_1 \to V_2$ es biyectiva.
Por otra parte, notar que f induce una función $f_E : E_1 \to E_2$ definida por $f(\{x, y\}) = \{f(x), f(y)\}$. Es claro que f_E es inyectiva. De la misma manera se tiene una función inyetiva $g_E : E_2 \to E_1$. Se deduce que $\#E_1 = \#E_2$ y por lo tanto f_E es biyectiva. A partir de esto es claro que f es un isomorfismo.

Proposición 0.1.4. *Se tiene que $G_1 \preceq G_2$ si y sólo si existe G_1' un subgrafo de G_2 que es isomorfo a G_1.*

Demostración.
($\Rightarrow$) Supongamos que tenemos $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$, y que $f : G_1 \to G_2$ es un encaje. Luego definimos el subgrafo $G_1' = (f(V_1), f(E_1))$. Es claro por la definición de encaje que f define un isomorfismo entre G_1 y G_1'.
($\Leftarrow$) Un isomorfismo $f : G_1 \to G_1'$ (con $G_2' \leq G_2$) se extiende de forma obvia a un encaje $f : G_1 \to G_2$. □

Sea $G = (V, E)$ un grafo (o grafo dirigido) y $V' \subset V$ un subconjunto cualquiera. El **subgrafo inducido** por V' es el máximo (bajo el orden $\leq$ definido al comienzo de esta sección) subgrafo de G que tiene a V' como conjunto de vértices.

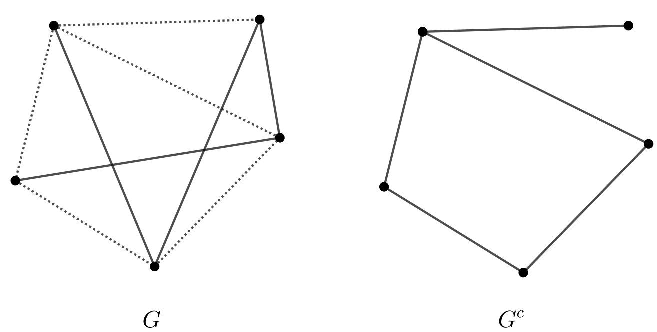
En la siguiente figura puede verse el grafo inducido por los vértices b, c y d de un grafo $G = (V, E)$ con $V = \{a, b, c, d, e, f\}$ y $E = \{\{a, f\}, \{b, c\}, \{b, e\}, \{c, d\}, \{d, e\}, \{d, f\}\}$.



Definimos el **complemento** de un grafo sin lazos $G = (V, E)$ como el grafo

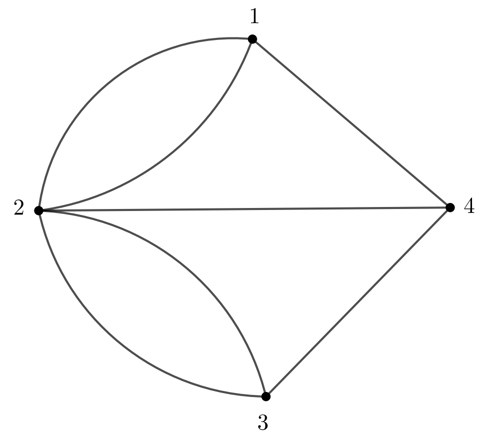
$$G^c = (V, (V \cdot V) \setminus (E \cup D)),$$

donde D es el conjunto de lazos en V. Es decir que es el grafo que resulta de sacarle a K_n las aristas de G, donde $n = \#V$.



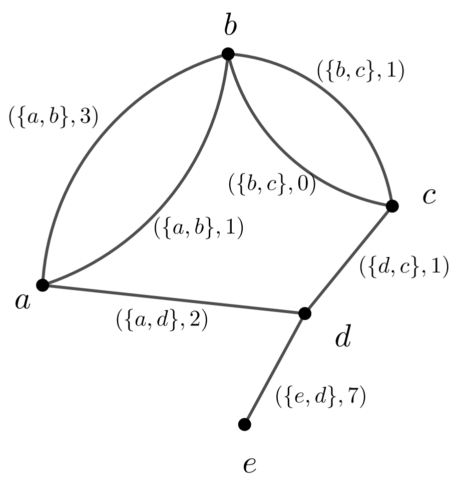
0.1.3. Multigrafos

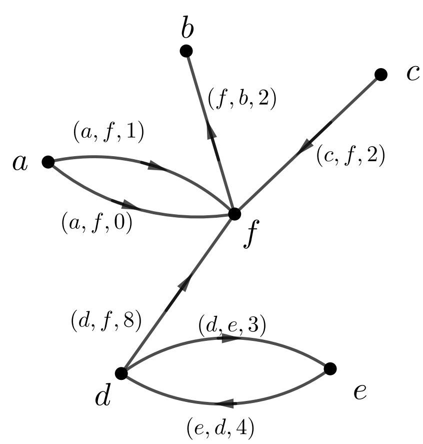
Volvamos al problema de los puentes de Königsberg y a la forma de modelarlo.



Como podemos ver, hay dos aristas entre 1 y 2 y dos aristas entre 2 y 3, luego la figura anterior no se ajusta a nuestra definición de grafo. Haremos entonces las siguientes definiciones:

Un **multigrafo** es un par $G = (V, E)$ donde V es un conjunto finito y E es un subconjunto finito de $(V \cdot V) \times \mathbb{N}$.
Un **multigrafo dirigido** es un par $G = (V, E)$ donde V es un conjunto finito y E es un subconjunto finito de $(V \times V) \times \mathbb{N}$.





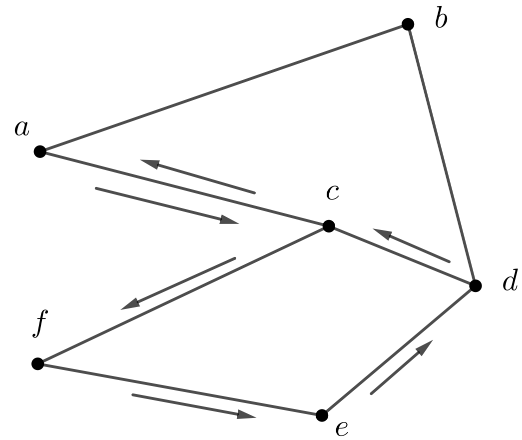
Las definiciones generales dadas anteriormente pueden extenderse (tanto en el caso dirigido como en el caso no dirigido) para definir:

- isomorfismo de multigrafos,
- encaje de un multigrafo en otro,
- sub-multigrafo, y
- sub-multigrafo inducido por un subconjunto de vértices.

No lo hacemos para no entrar en detalles técnicos, pero invitamos al lector interesado a intentarlo.

0.2. Caminatas en grafos

Un **camino** en un grafo $G = (V, E)$ es una secuencia de vértices $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ tal que $\{x_{i-1}, x_i\} \in E$ para todo $i = 1, \ldots, n$. En este caso decimos que el camino une x_0 con x_n. Si $x_0 = x_n$ el camino se dice **cerrado**.



(a, c, f, e, d, c, a)

La **longitud** del camino es, en este caso, el número n (la cantidad de aristas por las que se pasa). El camino cerrado (x_0) se dice **trivial** y su longitud es 0.
Decimos que un camino es un **recorrido** si no repite aristas, y que es un **camino simple** si no repite vértices con excepción de que se repitan los extremos.
Llamaremos **circuito** a un recorrido cerrado y **ciclo** a un camino simple cerrado.
Observar que un camino simple abierto (no cerrado) es un recorrido. También sucede que un ciclo de longitud mayor o igual a tres es un circuito.

Observar que las definiciones de arriba valen tanto para grafos como para grafos dirigidos.
Para dar un camino en un multigrafo, debemos especificar cuál de las aristas se toma al unir dos vértices adyacentes. Teniendo esto en cuenta definimos un **camino** en un multigrafo $G = (V, E)$ como una secuencia

$$(x_0, e_0, x_1, e_1, \ldots, e_{n-1}, x_n)$$

donde $x_1, \ldots, x_n \in V$ y para cada $i = 0, \ldots, n-1$, e_i es una arista que une x_i con x_{i+1}.
Para multigrafos dirigidos la definición es análoga.

También de manera análoga, se definen **camino**, **recorrido**, **circuito, camino simple** y **ciclo** en multigrafo o en un multigrafo dirigido.
Enunciamos y probamos el siguiente resultado para grafos, aunque vale (y la prueba también) para grafos dirigidos, multigrafos, multigrafos dirigidos.

Proposición 0.2.1. *Sea $G = (V, E)$ un grafo y $x, y \in V$. Si existe un camino que une x con y, entonces existe un camino simple que une ambos puntos.*

Demostración. Supongamos que tenemos un camino de largo n desde x a y. Consideramos entonces el conjunto de todos los caminos de x a y con longitud menor o igual a n, al que notamos por $\mathcal{C}_n$. Es claro que este conjunto es no vacío, además es finito porque V es finito. Luego existe un camino $c = (x = x_0, x_1, \ldots, x_k = y)$ que minimiza la longitud de todos los elementos de $\mathcal{C}_n$.
Si c no es un camino simple, entonces existen dos índices diferentes $i, j \in \{0, \ldots, k\}$ tal que $x_i = x_j$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer $i < j$.
Si $j < n$, podemos observar que $c' = (x_0, \ldots, x_i, x_{j+1}, \ldots, x_k)$ es un camino en $\mathcal{C}_n$ de longitud estrictamente menor a k.
Si $j = n$, se tiene que $i \neq 0$ (la repetición es $x_i = x_n$) y por tanto el camino $c' = (x_0, \ldots, x_i)$ es un camino en $\mathcal{C}_n$ de longitud estrictamente menor a k.
En ambos casos, se construyó un camino c' en $\mathcal{C}_n$ de longitud estrictamente menor a k, lo que contradice el hecho de que k es el mínimo de las longitudes de los caminos en $\mathcal{C}_n$.
Concluimos entonces que c debe ser un camino simple. $\square$

0.3. Conexión

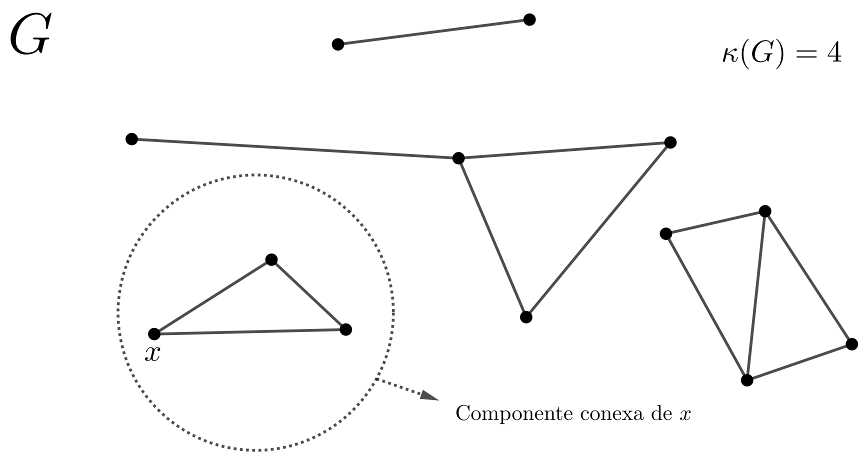
Diremos que un grafo $G = (V, E)$ es **conexo** si para todo par de vértices $x, y \in V$, existe un camino que los une.
Dado un grafo $G = (V, E)$, podemos definir la relación $\mathcal{R}$ en el conjunto de los vértices de la siguiente manera:

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \text{ existe un camino que une } x \text{ con } y.$$

La **componente conexa** de un vértice $v \in V$ es el subgrafo de G inducido por el subconjunto de vértices

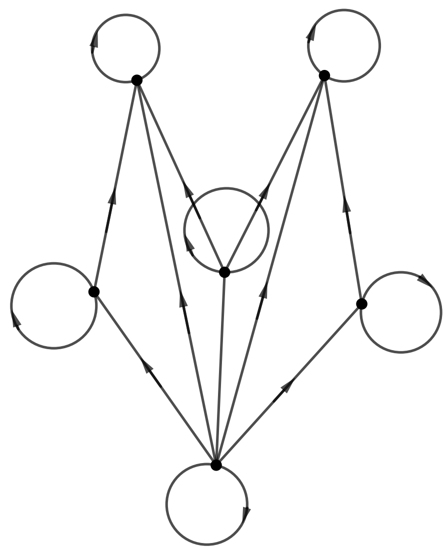
$$V' = \{x \in V \mid \text{ existe un camino de x a v}\}.$$

Usaremos la notación $\kappa(G)$ para indicar el número de componentes conexas del grafo G, que coincide con el cardinal del cociente $V/\mathcal{R}$. Observar que G es conexo si y sólo si $\kappa(G) = 1$.



Puede observarse que la relación $\mathcal{R}$ es de equivalencia cuyas clases de equivalencia son exactamente las componentes conexas (se deja como ejercicio).
La definición de conexión y de componente conexa vale para multigrafos. También vale que la relación $\mathcal{R}$ es de equivalencia.
Sin embargo, en el caso dirigido cambia un poco la situación.
Un grafo (o multigrafo) dirigido G se dice **conexo** si el grafo (multigrafo) que resulta de quitarle el sentido a las flechas de G es conexo.
Al grafo considerado en la definición anterior se lo llama *grafo subyacente de* G.
Para definir componente conexa en el caso dirigido, también se considera el grafo (multigrafo) subyacente.
La relación $\mathcal{R}$ para grafos (multigrafos) dirigidos se define de la misma manera y es claro que no es simétrica. Se tiene un resultado bien diferente en este caso.

Observación 0.3.1. Si $G = (V, E)$ es un grafo dirigido sin ciclos,la relación $\mathcal{R}$ es de orden.
Por otro lado, un conjunto ordenado puede verse como un grafo dirigido sin ciclos (sacando los lazos). Sin embargo, si $\leq$ es una relación de orden en V, entonces existe más de un grafo que genera $\leq$. En efecto, los siguientes grafos dirigidos generan la misma relación de orden $\mathcal{R}$.



Hay una noción de *componente conexa* en grafos dirigidos, pero su definición es un poco más técnica y no la presentaremos aquí .

0.4. Distancia

Hay una noción de distancia natural en los grafos conexos que está relacionada con la noción de longitud: para un par de vértices $x, y \in V$ tomamos $\mathcal{C}(x, y)$ el conjunto de los caminos que unen a x con y, luego definimos

$$dist(x, y) = \text{mín}\{long(c) : c \in \mathcal{C}(x, y)\}.$$

Observación 0.4.1. En general, una **distancia** o **métrica** en un conjunto X es una función $d : X \times X \to [0, +\infty)$ que cumple:

- $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$.
- $d(x, y) = d(y, x)$ para todo par de puntos $x, y \in X$.
- Dados tres puntos x, y, z, se cumple $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. (Esta es la desigualdad triangular.)

Luego $dist : V \times V \to \mathbb{N}$ es efectivamente una distancia.

Si $G = (V, E)$ es un grafo dirigido y definiéramos análogamente $dist$, no resultaría una distancia en V, ya que no se cumple la segunda condición de la Observación 0.4.1.